การศึกษาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบาง โดยใช้ทฤษฎีแกนขนานด้วยชุดทดลองฟิสิกัลเพนดูลัม

A STUDY ON THE MOMENT OF INERTIA AROUND THE CENTER OF MASS OF THIN GEOMETRICAL OBJECTS BASED ON THE PARALLEL AXIS THEOREM BY USING PHYSICAL PENDULUM APPARATUS

วิทยานิพนธ์

ของ

ปิ่นแก้ว กฤชแสงโชติ

ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิทยาศาสตร์ศึกษา

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

มิถุนายน 2560

การศึกษาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบาง โดยใช้ทฤษฎีแกนขนานด้วยชุดทดลองฟิสิกัลเพนดูลัม

A STUDY ON THE MOMENT OF INERTIA AROUND THE CENTER OF MASS OF THIN GEOMETRICAL OBJECTS BASED ON THE PARALLEL AXIS THEOREM BY USING PHYSICAL PENDULUM APPARATUS

วิทยานิพนธ์

ของ

ปิ่นแก้ว กฤชแสงโชติ

เสนอต่อมหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิทยาศาสตร์ศึกษา

มิถุนายน 2560

ใบรับรองวิทยานิพนธ์

เรื่อง

การศึกษาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบาง
โดยใช้ทฤษฎีแกนขนานด้วยชุดทดลองฟิสิกัลเพนดูลัม

A Study on the Moment of Inertia around the Center of Mass of Thin Geometrical Objects Based on the Parallel Axis Theorem by using Physical Pendulum Apparatus

ปิ่นแก้ว กฤชแสงโชติ

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานสอบวิทยานิพนธ์
(อาจารย์ ดร.วิระภรณ์ ไหมทอง)

.... ประธานที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์
(อาจารย์ ดร.โชติ เนืองนันท์)

.... กรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์
(อาจารย์ ดร.ชีวะ ทัศนา)

.... กรรมการสอบวิทยานิพนธ์
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นิภัทร เปี่ยมอรุณ)

.... กรรมการสอบวิทยานิพนธ์
(อาจารย์ ดร.อาภาพร บุญมี)

ได้รับอนุมัติจากมหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณีให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิทยาศาสตร์ศึกษา (ฟิสิกส์)

.... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
(รองศาสตราจารย์ ดร.ชัยยนต์ ประดิษฐศิลป์)

วันที่...18...เดือน...มิถุนายน...พ.ศ...2560...

ปิ่นแก้ว กฤชแสงโชติ. (2560). **การศึกษาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบางโดยใช้ทฤษฎีแกนขนานด้วยชุดทดลองฟิสิกัลป์เพนดูลัม**. วิทยานิพนธ์. วท.ม. (วิทยาศาสตร์ศึกษา). จันทบุรี : มหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี.

คณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์

โชติ เนืองนันท์ Ph.D. (Physics)	ประธานกรรมการ
ชีวะ ทัศนา ปร.ด. (ฟิสิกส์ประยุกต์)	กรรมการ

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบาง โดยใช้ทฤษฎีแกนขนานด้วยชุดทดลองฟิสิกัลป์เพนดูลัม โดยการใช้แผ่นอะคริลิกวัตถุรูปเรขาคณิตสามรูปแบบ ได้แก่ สี่เหลี่ยมผืนผ้า สามเหลี่ยมมุมฉาก และสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เพื่อศึกษาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวล จุดศูนย์ถ่วงของมวล การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกด้วยทฤษฎีแกนขนานด้วยชุดทดลองฟิสิกัลเพนดูลัม

ผลการวิจัยพบว่า ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลที่หาได้จากการทดลองมีความสอดคล้องกับค่าการคำนวณทางทฤษฎีอย่างยอดเยี่ยม โดยพบว่ามีความแตกต่างกันไม่เกินร้อยละ 5 กรณีการศึกษาแนวโน้มของตำแหน่งที่ทำให้คาบการแกว่งมีค่าน้อยที่สุด โดยนำข้อมูลคาบเฉลี่ยมาเขียนกราฟระหว่างคาบเฉลี่ยกับระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางมวล ทำให้ได้ความสัมพันธ์ของคาบเฉลี่ยกับระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางมวลในรูปของสมการพหุนามกำลังสอง และสมการพหุนามกำลังสี่ ทำการหาจุดวิกฤติเพื่อคำนวณคาบเวลาเฉลี่ยในการแกว่งที่น้อยที่สุด และเทียบกับค่าเวลาที่น้อยที่สุดทางทฤษฎี พบว่าคาบเวลาเฉลี่ยที่น้อยที่สุด ที่เกิดจากผลการแกว่ง และเปรียบเทียบกับผลการคำนวณทางทฤษฎีพบว่ามีความใกล้เคียงกันอย่างมาก โดยมีค่าความแตกต่างกันในระดับมิลลิวินาทีเท่านั้น งานวิจัยนี้ยังนำเสนอรูปแบบการทำการทดลองอย่างง่าย ประหยัด สำหรับการศึกษาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบาง

Pinkaeo Krishsangchote. (2017). **A Study on the Moment of Inertia around the Center of Mass of Thin Geometrical Objects Based on the Parallel Axis Theorem by using Physical Pendulum Apparatus.** Thesis. M.Sc. (Science Education - Physics). Chanthaburi: Rambhai Barni Rajabhat University.

Thesis Advisors

Chote Nuangnun Ph.D. (Physics)	Chairman
Chewa Thassana Ph.D. (Applied Physics)	Member

Abstract

The purposes of this research were: 1) To study the moment of inertia around the center of mass of thin geometrical objects based on the parallel axis theorem by using physical pendulum apparatus. Three acrylic geometric sheets (rectangle, right triangle and isosceles triangle) were used. 2) To study the moment of inertia, center of mass, penodic oscillation, harmonic motion of the physical pendulum and the parallel axis theorem.

The experimental results found that the moment of inertia around the center of mass was in agreement with the theoretical calculation values within a 5% error. The positions which give a minimum period of physical pendulum can be found by plotting the graph between the average period and the mass center distance. The result is a quadratic polynomial equation. The critical points to calculate the minimum average period from the experimental results were also in agreement with the theoretical calculated values of the order of a millisecond. We present this simple experiment which uses very low cost equipment to investigate the subject of moment of inertia around the center of mass of thin geometrical objects.

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงลงได้ ด้วยความช่วยเหลือจาก อาจารย์ ดร.โชติ เนืองนันท์ ที่ให้คำปรึกษา แนะนำช่วยเหลือตลอดระยะเวลาการทำวิจัย อาจารย์ ดร.ชีวะ ทัศนา ที่ให้คำปรึกษา คำแนะนำในการแก้ปัญหาและข้อบกพร่องต่าง ๆ ตลอดระยะเวลาการทำวิจัย ผู้วิจัยซาบซึ้งและขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ ดร.วิระภรณ์ ไหมทอง ภาควิชาฟิสิกส์และวิทยาศาสตร์ทั่วไป คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่ ที่ให้ความอนุเคราะห์ในการเป็นประธานคณะกรรมการการสอบวิทยานิพนธ์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นิภัทร เปี่ยมอรุณ และอาจารย์ ดร.อาภาพร บุญมี ภาควิชาเคมี คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี ที่ให้ความอนุเคราะห์ในการเป็นกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ รวมทั้งให้คำแนะนำเพิ่มเติม ทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เสร็จสมบูรณ์

ขอขอบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี ทุกท่านที่ให้คำปรึกษาและประสิทธิ์ประสาทวิชา ตลอดระยะเวลาที่ศึกษาในสถาบันแห่งนี้

ขอขอบคุณ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) และโครงการส่งเสริมครูผู้มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ (สควค.) ที่ให้ทุนการศึกษาต่อระดับปริญญาตรี - ปริญญาโท

ขอขอบคุณเพื่อน ๆ นิสิตปริญญาโท สาขาวิชาวิทยาศาสตร์ศึกษาทุกท่าน ที่เป็นกำลังใจและสร้างบรรยากาศทางวิชาการที่ดีตลอดมา

ท้ายสุดนี้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ บิดา-มารดา ที่เป็นทั้งกำลังใจและแรงผลักดันให้ผู้วิจัยศึกษาในสาขาวิชาที่รักและมุ่งหวังจนสำเร็จลุล่วงอย่างไม่มีเงื่อนไข และขอบคุณสามี ที่ให้กำลังใจและให้ช่วยเหลือตลอดมา

ปิ่นแก้ว กฤชแสงโชติ

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญตาราง

สารบัญภาพ

สารบัญภาพ

บทนำ

ความเป็นมา

จากหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 วิชาฟิสิกส์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ในส่วนเนื้อหาเรื่องการเคลื่อนที่แบบหมุน ได้มีการกำหนดสูตรสำเร็จที่ใช้หาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปทรงเรขาคณิตแบบต่าง ๆ โดยมิได้แสดงที่มาของสูตร ซึ่งผู้เรียนต้องใช้ทักษะด้านความจำเพียงอย่างเดียวในการนำไปประยุกต์ใช้คำนวณ (กระทรวงศึกษาธิการ. 2552 : 105) ในเรื่อง พลังงานจากการหมุน ทอร์ก หรือโมเมนตัมเชิงมุม ส่วนการศึกษาในระดับอุดมศึกษาชั้นปีที่ 1 - 2 วิชาฟิสิกส์ ในหัวข้อเดียวกันนั้น มีทั้งให้ผู้เรียนใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์เชิงแคลคูลัสในการหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวล และมีการปฏิบัติการทดลองเพื่อตรวจสอบความรู้ทางทฤษฎีควบคู่กันไป ซึ่งแต่ละมหาวิทยาลัยจะมีรูปแบบการทดลองที่แตกต่างกันออกไป

ดังนั้น ถ้าหากเรามีรูปแบบชุดการทดลองที่สามารถทำให้ผู้เรียนได้ตรวจสอบความรู้ทางทฤษฎีด้วยตนเองจากการลงมือปฏิบัติการทดลอง ควบคู่กับการเรียนทางทฤษฎี จะส่งผลให้ระบบการเรียนการสอนมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น จากแนวคิดในบทความ An Experiment on a Physical Pendulum and Steiner's Theorem (Russeva, Tsutsumanova and Russev. 2010 : 58 - 62) ได้ทำการทดลองฟิสิกัลเพนดูลัม ตรวจสอบทฤษฎีแกนขนานของสไตเนอร์ โดยการนำกระดาษแข็งตัดเป็นรูปปลาวาฬเพื่อทำเป็นลูกตุ้มฟิสิกัล นำมาหาจุดศูนย์กลางมวลอย่างง่ายด้วยการพยายามวางลูกตุ้มฟิสิกัลรูปปลาวาฬนี้บนปลายเข็ม หลังจากนั้นเจาะรูรอบตัวปลาวาฬ จำนวน 7 จุด ทำการทดลองโดยการปล่อยลูกตุ้มฟิสิกัลรูปปลาวาฬให้แกว่ง ที่จุดแขวนบริเวณปลายไม้บรรทัด ณ ตำแหน่งต่าง ๆ จำนวน 7 ตำแหน่ง พร้อมจับเวลา คำนวณหาคาบ และคำนวณคาบเวลาเฉลี่ยในการแกว่ง เพื่อนำไปคำนวณหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลต่อมวลของวัตถุ โดยไม่ได้แสดงการเปรียบเทียบผลที่ได้จากการทดลองกับผลทางทฤษฎี และจากบทความข้างต้นเนื่องจากผู้วิจัยเป็นครูผู้สอนวิชาฟิสิกส์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย จึงเกิดความสนใจที่จะนำความรู้ดังกล่าวมาศึกษาและตรวจสอบ เพื่อสร้างชุดทดลองที่สามารถพัฒนามาประยุกต์ใช้ในการเรียนการสอนต่อไปได้

ในงานวิจัยนี้เป็นการออกแบบชุดทดลองฟิสิกัลเพนดูลัมรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบางเพื่อหาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของแผ่นอะคริลิกรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า สามเหลี่ยมมุมฉาก และสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยนำลูกตุ้มฟิสิกัลรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า สามเหลี่ยมมุมฉาก และสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มาปล่อยให้แกว่งพร้อมจับเวลาในการแกว่ง 20 รอบ จำนวน 5 ตำแหน่ง ปล่อยให้แกว่ง

ตำแหน่งละ 5 ครั้ง คำนวณหาคาบและคาบเวลาเฉลี่ย และนำค่าคาบเวลาเฉลี่ยที่ได้แทนในสมการ $I_{Z_{CM}} = \frac{mgdT^2}{4\pi^2} - md^2$ และตรวจสอบทฤษฎีแกนขนาน โดยนำค่าโมเมนต์ความเฉื่อยที่ได้จากการทดลองไปเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากการคำนวณ โดยวิธีแคลคูลัสตามทฤษฎี ทำการพิจารณาแนวโน้มความสัมพันธ์ของคาบกับระยะห่างในแนวขนานวัดจากจุดศูนย์กลางมวล เพื่อหาระยะห่างในแนวขนานวัดจากจุดศูนย์กลางมวลที่ทำให้คาบการแกว่งต่ำสุด โดยเปรียบเทียบค่าที่ได้จากทฤษฎี จากการทดลอง และจากการสร้างเส้นแนวโน้ม แล้วแก้สมการพหุนามกำลังสองและพหุนามกำลังสี่ หลังจากนั้นทำการทดลองเพิ่มโดยนำลูกตุ้มฟิสิกัลรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า สามเหลี่ยมมุมฉาก และสามเหลี่ยมหน้าจั่วเจาะรู ณ ตำแหน่งที่คาบการแกว่งต่ำสุดทางทฤษฎี ทำการทดลองและคำนวณหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยเหมือนกับการทดลองในครั้งแรก นำค่าโมเมนต์ความเฉื่อย ณ ตำแหน่งที่คาบการแกว่งต่ำสุดเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากการแก้สมการพหุนามกำลังสี่ และคำนวณหาค่าความคลาดเคลื่อน ถ้าวิธีการนี้มีการตรวจสอบหรือแสดงให้เห็นว่าเป็นจริงเชื่อถือได้ เราสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในรูปแบบที่ง่ายขึ้น โดยใช้วัสดุอุปกรณ์ที่หาได้ในชีวิตประจำวัน และเหมาะสมกับการเรียนการสอนในปัจจุบัน

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อออกแบบชุดทดลองฟิสิกัลเพนดูลัมรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบาง
2. เพื่อหาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของแผ่นอะครีลิครูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า สามเหลี่ยมมุมฉาก และสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยใช้ทฤษฎีแกนขนาน
3. เพื่อตรวจสอบทฤษฎีแกนขนาน โดยการเปรียบเทียบค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบางที่ได้จากชุดทดลองกับการคำนวณ โดยวิธีแคลคูลัสตามทฤษฎี
4. เพื่อตรวจสอบแนวโน้มของตำแหน่งที่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวล ที่ทำให้ได้คาบการแกว่งต่ำสุด

ประโยชน์ของการวิจัย

1. ได้ชุดทดลองฟิสิกัลเพนดูลัมที่มีประสิทธิภาพสามารถหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวล ($I_{Z_{CM}}$) ของวัตถุรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบางที่มีความคลาดเคลื่อนไม่เกินร้อยละ 5 จากค่าทฤษฎีที่ได้จากการคำนวณ โดยวิธีแคลคูลัส
2. ได้วิธีการหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวล ($I_{Z_{CM}}$) ของวัตถุรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบางโดยใช้ทฤษฎีแกนขนานของสไตน์เนอร์ ซึ่งได้ค่าค่อนข้างถูกต้องแม่นยำ
3. ได้แนวโน้มของตำแหน่งที่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวล ที่ทำให้ได้คาบการแกว่งต่ำสุด

ขอบเขตของการวิจัย

1. หาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวล ($I_{Z_{CM}}$) ของวัตถุแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า สามเหลี่ยมมุมฉาก และสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยใช้ชุดทดลองฟิสิกัลเพนดูลัมและคำนวณกลับโดยใช้ทฤษฎีแกนขนานของสไตน์เนอร์

2. ตรวจสอบค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลที่ได้จากการทดลองด้วยชุดทดลองฟิสิกัลเพนดูลัม กับค่าที่ได้จากการคำนวณ โดยวิธีแคลคูลัสทางทฤษฎี

3. ตรวจสอบแนวโน้มของตำแหน่งที่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวล ที่ทำให้ได้คาบเวลาน้อยที่สุดในการแกว่ง โดยเปรียบเทียบคาบเวลาเฉลี่ยที่ได้จากการสร้างเส้นแนวโน้ม แล้วแก้สมการพหุนามกำลังสี่กับผลจากการทดลอง ณ ตำแหน่งคาบการแกว่งต่ำสุดทางทฤษฎี

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. วัตถุรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบาง คือ แผ่นอะครีลิค ที่ถูกตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า สามเหลี่ยมมุมฉาก และสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

2. ค่า ($I_{z_{cm}}$) โมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุของวัตถุรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบาง

3. ค่า d_T เป็นระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวลที่ทำให้ได้คาบการแกว่งต่ำสุดทางทฤษฎี

4. ค่า d_E ระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวลที่ทำให้ได้คาบการแกว่งต่ำสุดจากการทดลอง

5. ค่า d_C ระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวลที่ทำให้ได้คาบการแกว่งต่ำสุดจากการหาค่าวิกฤต

6. ค่า $T_{MIN\text{-}THEORY}$ เป็นคาบการแกว่งต่ำสุดทางทฤษฎี

7. ค่า $T_{MIN\text{-}CRISIS}$ เป็นคาบการแกว่งต่ำสุดที่เกิดจากการแทนค่าระยะ d_C ลงในสมการพหุนามกำลังสี่ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างคาบการแกว่ง และระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวล

สมมุติฐานของการวิจัย

1. ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบางจากการทดลองด้วยชุดทดลองฟิสิกัลเพนดูลัมและทฤษฎีแกนขนานของสไตน์เนอร์ จะได้ค่าที่ใกล้เคียงกับค่าที่ได้จากการคำนวณโดยวิธีแคลคูลัส โดยมีความคลาดเคลื่อนในระดับที่ยอมรับได้ คือ ไม่เกินร้อยละ 5

2. แนวโน้มของคาบการแกว่งต่ำสุด เมื่อเปรียบเทียบกับการแก้สมการพหุนามกำลังสี่ให้ผลที่สอดคล้องและเป็นไปในทางเดียวกัน

แนวคิด ทฤษฎี และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องและได้นำเสนอในหัวข้อต่อไปนี้

1. แนวคิดและทฤษฎี

    1.1 จุดศูนย์กลางมวล (Center of Mass)

    1.2 การหาตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบางด้วยคณิตศาสตร์แบบแคลคูลัส

    1.3 โมเมนต์ความเฉื่อย (Moment of Inertia)

    1.4 ทฤษฎีแกนตั้งฉาก (Orthogonal Axis Theorem)

    1.5 การหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบางด้วยคณิตศาสตร์แบบแคลคูลัส

    1.6 สูตรสำเร็จตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวล $\left(X_{CM}, Y_{CM}\right)$ และค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปเรขาคณิตแผ่นบาง ($I_{Z_{CM}}$)

    1.7 ทฤษฎีแกนขนานของสไตน์เนอร์ (Steiner's Parallel Axis Theorem)

    1.8 ลูกตุ้มฟิสิกัล (Physical Pendulum)

    1.9 แนวโน้มของคาบเวลาเมื่อเลื่อนตำแหน่งออกตามแนวขนานวัดจากจุดศูนย์กลางมวล

    1.10 อะคริลิก

2. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

    2.1 งานวิจัยในประเทศ

    2.2 งานวิจัยต่างประเทศ

แนวคิดและทฤษฎี

จุดศูนย์กลางมวล (Center of Mass)

ในระบบอนุภาคใด ๆ ตามจริงนั้นวัตถุมีขนาดไม่ได้เป็นจุด การออกแรงกระทำต่อวัตถุเพื่อให้วัตถุมีการเลื่อนตำแหน่งโดยไม่หมุน แรงที่กระทำต่อวัตถุจะต้องผ่านตำแหน่งหนึ่ง ซึ่งเป็นตำแหน่งที่เปรียบเสมือนจุดรวมของมวลของวัตถุทั้งก้อน และเรียกตำแหน่งนั้น ๆ ว่าจุดศูนย์กลางมวล โดยที่ตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลวัตถุแข็งเกร็งตำแหน่งจะเป็นจุดที่อยู่ประจำที่

ถ้าวัตถุที่เป็นจุดมวลสองจุดมีมวลไม่เท่ากัน อยู่แยกกันห่างจากกัน จุดศูนย์กลางมวลจะอยู่ใกล้มวลที่มากกว่า สำหรับมวล m_1 และ m_2 อยู่บนแกน X และอยู่ห่างจากตำแหน่งอ้างอิงที่จุดกำเนิด 0 เป็นระยะ r_1 และ r_2 ตามลำดับ ตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวล หาได้จากสมการ

$$\text{C.M.} = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} \quad \text{---------- (1)}$$

เมื่อ C.M. คือ ตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุ

m_1 คือ มวลของวัตถุส่วนที่หนึ่ง มีหน่วยเป็นกิโลกรัม

m_2 คือ มวลของวัตถุส่วนที่สอง มีหน่วยเป็นกิโลกรัม

r_1 คือ ระยะที่มวล m_1 อยู่ห่างจากตำแหน่งอ้างอิง 0 มีหน่วยเป็นเมตร

r_2 คือ ระยะที่มวล m_2 อยู่ห่างจากตำแหน่งอ้างอิง 0 มีหน่วยเป็นเมตร

หากวัตถุแข็งเกร็งประกอบด้วยมวลชิ้นย่อย ๆ เรียงตัวต่อเนื่องกัน จุดศูนย์กลางมวลของวัตถุถือเป็นตำแหน่งที่เสมือนกับว่ามวลชิ้นย่อย ๆ ของวัตถุมารวมกันที่จุดดังกล่าว การคำนวณหาจุดศูนย์มวลทางคณิตทำได้สองวิธี

กรณีวัตถุแข็งเกร็งแบบแผ่นบาง มวลไม่ต่อเนื่อง ใช้การคำนวณแบบพีชคณิตในการหาตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลดังนี้

$$\text{C.M.} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i r_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad \text{---------- (2)}$$

เมื่อ C.M. คือ ตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุ

$\sum_{i=1}^{n} m_i r_i$ คือ โมเมนต์รวมของวัตถุ มีหน่วยเป็นกิโลกรัม·เมตร

$\sum_{i=1}^{n} m_i$ คือ มวลรวมของวัตถุ มีหน่วยเป็นกิโลกรัม

กรณีวัตถุแบบแผ่นบางที่มีมวลต่อเนื่อง เราสามารถหาตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลด้วยคณิตศาสตร์แบบแคลคูลัส ได้ว่า

$$\text{C.M.} = \frac{\int r\,dm}{\int dm} = \frac{\int r\rho\,dA}{\int \rho\,dA} = \frac{\int r\,dA}{\int dA} \quad \text{---------- (3)}$$

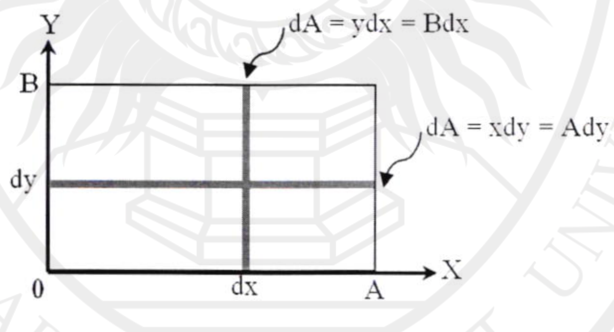
เมื่อ	C.M.	คือ	ตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุ
	$\int rdm$	คือ	โมเมนต์รวมของวัตถุ มีหน่วยเป็นกิโลกรัม·เมตร
	$\int dm$	คือ	มวลรวมของวัตถุ มีหน่วยเป็นกิโลกรัม
	ρ	คือ	ความหนาแน่นของแผ่นวัตถุ มีหน่วยเป็นกิโลกรัม/ตารางเมตร ซึ่งถ้าวัตถุมีความหนาแน่นสม่ำเสมอ สามารถตัดทิ้งได้
	$\int dA$	คือ	พื้นที่ย่อยขนาดเล็ก ๆ มีหน่วยเป็นตารางเมตร

หรืออาจกล่าวเป็นภาษาในทางสถิติว่า จุดศูนย์กลางมวลคือตำแหน่งเฉลี่ยของอนุภาคที่ถ่วงน้ำหนักด้วยมวล (ปิยพงษ์ สิทธิคง. 2547 : 246)

การหาตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบางด้วยคณิตศาสตร์แบบแคลคูลัส

1. จุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแบบแผ่นบาง

จุดศูนย์กลางมวล ของกรณีของแผ่นวัตถุรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแบบแผ่นบาง กว้าง B ยาว A มวล M ดังภาพประกอบ 1 สามารถหาได้ดังนี้



ภาพประกอบ 1 การหาจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแบบแผ่นบาง

$$X_{CM} = \frac{\int_0^A x \cdot Bdx}{\int_0^A Bdx}$$

$$= \frac{\int_0^A xdx}{\int_0^A dx}$$

$$= \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^A}{(x)\Big|_0^A}$$

$$= \frac{\left(\frac{A^2}{2}\right)}{A}$$

$$= \frac{A}{2} \qquad \text{---------- (4)}$$

$$Y_{CM} = \frac{\int_0^B y \cdot Ady}{\int_0^B Ady}$$

$$= \frac{\int_0^B ydy}{\int_0^B dy}$$

$$= \frac{\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^B}{(y)\Big|_0^B}$$

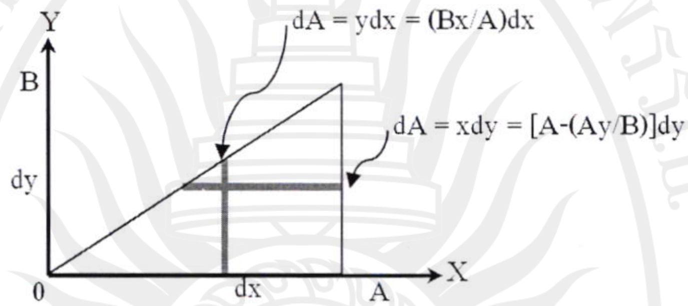
$$= \frac{\left(\frac{B^2}{2}\right)}{B}$$

$$= \frac{B}{2} \qquad \text{---------- (5)}$$

นั่นคือ จุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแบบแผ่นบาง กว้าง B ยาว A มวล M คือ $\left(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}\right)$

2. จุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปสามเหลี่ยมมุมฉากแบบแผ่นบาง

จุดศูนย์กลางมวล ของกรณีของวัตถุรูปสามเหลี่ยมมุมฉากแบบแผ่นบาง ฐานยาว A สูง B มวล M ดังภาพประกอบ 2 สามารถหาได้ดังนี้



ภาพประกอบ 2 การหาจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปสามเหลี่ยมมุมฉากแบบแผ่นบาง

$$X_{CM} = \frac{\int_0^A x \cdot \left(\frac{B}{A}x\right)dx}{\int_0^A \left(\frac{B}{A}x\right)dx}$$

$$= \frac{\int_0^A x^2 dx}{\int_0^A x dx}$$

$$= \frac{\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^A}{\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^A}$$

$$= \frac{\left(\frac{A^3}{3}\right)}{\left(\frac{A^2}{2}\right)}$$

$$= \frac{2A}{3} \qquad \text{---------- (6)}$$

$$Y_{CM} = \frac{\int_0^B y \cdot \left(A - \frac{Ay}{B}\right) dy}{\int_0^B \left(A - \frac{Ay}{B}\right) dy}$$

$$= \frac{\int_0^B \left(Ay - \frac{Ay^2}{B}\right) dy}{\int_0^B \left(A - \frac{Ay}{B}\right) dy}$$

$$= \frac{\left(\frac{Ay^2}{2} - \frac{Ay^3}{3B}\right)\Big|_0^B}{\left(Ay - \frac{Ay^2}{2B}\right)\Big|_0^B}$$

$$= \frac{\left(\frac{AB^2}{2} - \frac{AB^3}{3}\right)}{\left(AB - \frac{AB}{2}\right)}$$

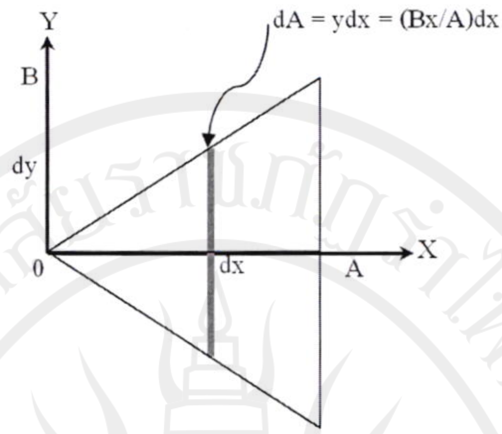
$$= \frac{\left(\frac{AB^2}{6}\right)}{\left(\frac{AB}{2}\right)}$$

$$= \frac{B}{3} \qquad \text{---------- (7)}$$

นั่นคือ จุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปสามเหลี่ยมมุมฉากแบบแผ่นบาง ฐาน A สูง B มวล M คือ $\left(\frac{2A}{3}, \frac{B}{3}\right)$ (สมชาย เกียรติกมลชัย. 2553 : 41)

3. จุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วแบบแผ่นบาง

จุดศูนย์กลางมวล ของกรณีของแผ่นวัตถุรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วแบบแผ่นบาง สูง A ฐานยาว 2B มวล M วางตัวดังภาพประกอบ 3 สามารถหาได้ดังนี้



ภาพประกอบ 3 การหาจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วแบบแผ่นบาง

$$X_{CM} = \frac{\int_0^A x \cdot \left(\frac{2B}{A}x\right)dx}{\int_0^A \left(\frac{2B}{A}x\right)dx}$$

$$= \frac{\int_0^A x^2 dx}{\int_0^A x dx}$$

$$= \frac{\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^A}{\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^A}$$

$$= \frac{\left(\frac{A^3}{3}\right)}{\left(\frac{A^2}{2}\right)}$$

$$= \frac{2A}{3} \qquad \text{----------} \ (8)$$

นั่นคือ จุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วแบบแผ่นบาง สูง A ฐาน 2B มวล M คือ $\left(\frac{2A}{3}, 0\right)$

โมเมนต์ความเฉื่อย (Moment of Inertia)

โมเมนต์ความเฉื่อย เป็นสมบัติอย่างหนึ่งเกิดขึ้นเมื่อวัตถุหมุน เป็นปริมาณที่บอกความเฉื่อยในการหมุน (Rotational Inertia) ของวัตถุ ในการที่จะพยายามรักษาสภาพเดิมของการหมุนเอาไว้ โดยวัตถุมีโมเมนต์ความเฉื่อยมาก ก็จะทำให้วัตถุนั้นเปลี่ยนสภาพของการหมุนเดิมได้ยาก และถ้าวัตถุนั้นมีโมเมนต์ความเฉื่อยน้อยก็จะทำให้วัตถุนั้นเปลี่ยนสภาพของการหมุนเดิมได้ง่าย ซึ่งโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุมีค่าขึ้นกับแกนหมุน รูปร่างของวัตถุและลักษณะการเรียงตัวของวัตถุรอบแกนหมุน การคำนวณหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยแยกการพิจารณาได้เป็น 2 กรณีดังนี้

กรณีที่หนึ่ง : วัตถุที่ประกอบด้วยมวลก้อนเล็ก ๆ โมเมนต์ความเฉื่อยคำนวณได้จากสมการ

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \qquad \text{----------} \ (9)$$

เมื่อ I คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุ มีหน่วยเป็นกิโลกรัม·เมตร^2

m_i คือ มวลชิ้นที่ i ที่กระจายอยู่ในเนื้อวัตถุ มีหน่วยเป็นกิโลกรัม

r_i คือ ระยะตั้งฉากจากมวลไปยังแกนหมุน มีหน่วยเป็นเมตร

กรณีที่สอง : วัตถุที่เป็นรูปทรงเรขาคณิต หรือวัตถุที่มีมวลกระจายต่อเนื่องกันเสมือนเป็นเนื้อเดียวกัน คำนวณหาค่าโมเมนต์ของความเฉื่อยของวัตถุ ได้ดังนี้

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dA \qquad \text{----------} \ (10)$$

เมื่อ I คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุ มีหน่วยเป็นกิโลกรัม·เมตร^2

r คือ ระยะตั้งฉากจากมวลไปยังแกนหมุน มีหน่วยเป็นเมตร

dm คือ มวลส่วนย่อย ๆ ที่พิจารณา มีหน่วยเป็นกิโลกรัม

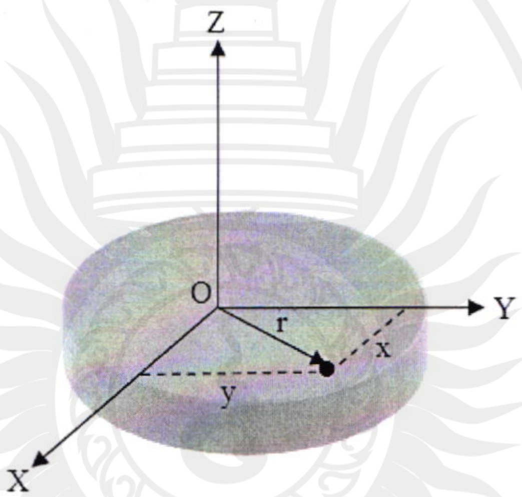
ρ คือ ความหนาแน่นเชิงพื้นที่ของแผ่นวัตถุ มีหน่วยเป็นกิโลกรัมต่อตารางเมตร

dA คือ พื้นที่ย่อยขนาดเล็ก ๆ มีหน่วยเป็นตารางเมตร

โมเมนต์ความเฉื่อยเป็นปริมาณสเกลาร์ โดยโมเมนต์ความเฉื่อยจะมีค่ามากหรือน้อยขึ้นกับมวล และระยะจากมวลไปยังแกนหมุน ถ้าแกนหมุนเปลี่ยนไปจะมีผลทำให้ลักษณะการหมุนและค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุเปลี่ยนไปด้วย

ทฤษฎีแกนตั้งฉาก (Orthogonal Axis Theorem)

หากกำหนดให้ I_X , I_Y และ I_Z คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรอบแกน X, Y และ Z ตามลำดับ ดังภาพประกอบ 4



ภาพประกอบ 4 ทฤษฎีแกนตั้งฉาก

ที่มา : ภาควิชาฟิสิกส์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. 2543 : 135

จะพบว่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนที่ตั้งฉากกับระนาบของวัตถุมีค่าเท่ากับผลบวกของโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุในสองแนวแกนที่ตั้งฉากกันและขนานกับระนาบของแผ่นวัตถุ

เขียนเป็นสมการได้ว่า

$$I_Z = I_X + I_Y \qquad \text{---------- (11)}$$

เมื่อ I_Z คือ โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลที่ตั้งฉากกับระนาบของแผ่นวัตถุ

I_X, I_Y คือ โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนที่ขนานกับระนาบในทิศ X และ Y ตามลำดับ โดยแกน X และ Y ตั้งฉากต่อกันในแนวระนาบของวัตถุ

การพิสูจน์ทฤษฎีแกนตั้งฉาก โดยอาศัยทฤษฎีบทของปีทากอรัส

จากทฤษฎีบทของปีทากอรัสและภาพประกอบ 1 พบว่า

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{---------- (12)}$$

เมื่อ r คือ ระยะจากแกน Z ไปถึงอนุภาคใด ๆ มีหน่วยเป็นเมตร

x คือ ระยะจากแกน Y ไปถึงอนุภาคใด ๆ มีหน่วยเป็นเมตร

y คือ ระยะจากแกน X ไปถึงอนุภาคใด ๆ มีหน่วยเป็นเมตร

จากนิยามของโมเมนต์ความเฉื่อย จึงสามารถเขียนได้ว่า

$$I_Z = \int r^2 dm$$

$$= \int \left(x^2 + y^2\right) dm$$

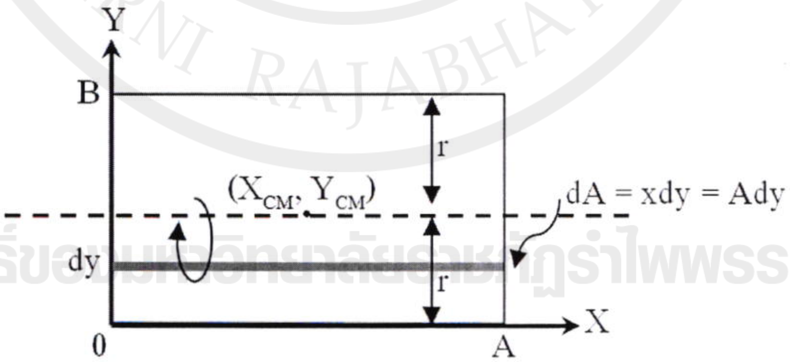
$$= \int x^2 dm + \int y^2 dm$$

$$= I_X + I_Y$$

การหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบางด้วยคณิตศาสตร์แบบแคลคูลัส

1. โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแบบแผ่นบาง

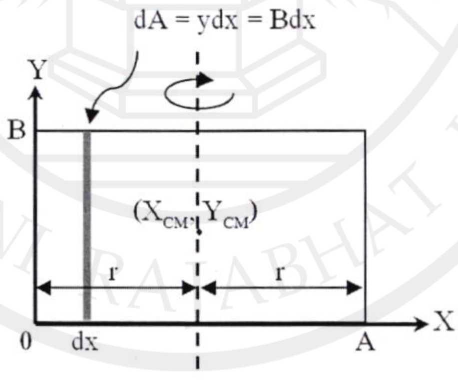
โมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแบบแผ่นบางมวล M กว้าง B ยาว A รอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลขนานกับแนวแกน X ดังภาพประกอบ 5 สามารถหาได้ดังนี้



ภาพประกอบ 5 โมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแบบแผ่นบางรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลขนานกับแนวแกน X

$$
\begin{aligned}
I_{X_{CM}} &= \int y^2 \rho dA \\
&= \int y^2 \left(\frac{M}{AB}\right) x dy \\
&= \left(\frac{M}{AB}\right) A \int_{-B/2}^{B/2} y^2 dy \\
&= \left(\frac{M}{AB}\right) A \left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-B/2}^{B/2} \\
&= \left(\frac{M}{AB}\right) A \left(\frac{B^3}{24} - \left(-\frac{B^3}{24}\right)\right) \\
&= \frac{1}{12} M B^2 \qquad \text{----------} \ (13)
\end{aligned}
$$

โมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุสี่เหลี่ยมผืนผ้าแบบแผ่นบาง กว้าง B ยาว A รอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลขนานกับแนวแกน Y ดังภาพประกอบที่ 6 สามารถหาได้ดังนี้



ภาพประกอบ 6 โมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแบบแผ่นบาง รอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลขนานกับแนวแกน Y

$$I_{Y_{CM}} = \int x^2 \rho dA$$

$$= \int x^2 \left(\frac{M}{AB}\right) y dx$$

$$= \left(\frac{M}{AB}\right) B \int_{-A/2}^{A/2} x^2 dx$$

$$= \left(\frac{M}{AB}\right) B \left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-A/2}^{A/2}$$

$$= \left(\frac{M}{AB}\right) B \left(\frac{A^3}{24} - \left(-\frac{A^3}{24}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{12} MA^2 \qquad \text{----------} \ (14)$$

และจากสมการที่ (11)

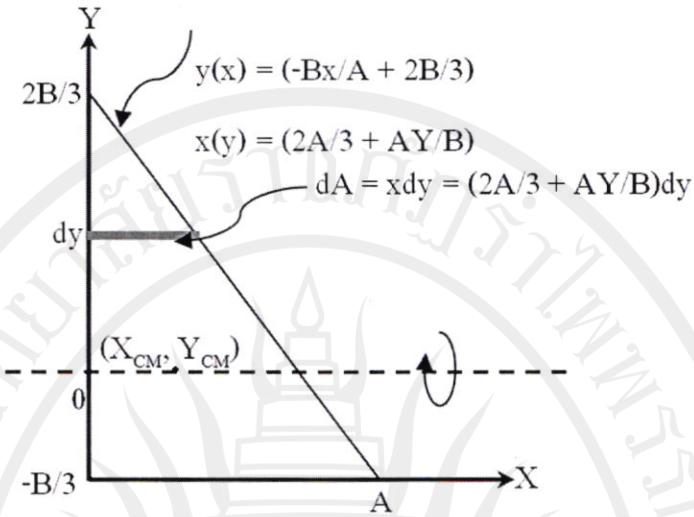
$$I_{Z_{CM}} = I_{X_{CM}} + I_{Y_{CM}}$$

$$= \frac{1}{12} MB^2 + \frac{1}{12} MA^2$$

$$= \frac{1}{12} M\left(A^2 + B^2\right) \qquad \text{----------} \ (15)$$

2. โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรูปสามเหลี่ยมมุมฉากแบบแผ่นบาง

โมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปสามเหลี่ยมมุมฉากแบบแผ่นบาง ฐาน A สูง B รอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลขนานกับแนวแกน X ดังภาพประกอบ 7 สามารถหาได้ดังนี้



ภาพประกอบ 7 โมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปสามเหลี่ยมมุมฉากแบบแผ่นบาง รอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลขนานกับแนวแกน X

$$I_{X_{CM}} = \int y^2 \rho dA$$

$$= \rho \int_{-B/3}^{2B/3} y^2 \left(\frac{2A}{3} - \frac{Ay}{B} \right) dy$$

$$= \rho \left(\frac{2Ay^3}{9} - \frac{Ay^4}{4B} \right) \Bigg|_{-B/3}^{2B/3}$$

$$= \left(\frac{2M}{AB} \right) \left(\frac{2Ay^3}{9} - \frac{Ay^4}{4B} \right) \Bigg|_{-B/3}^{2B/3}$$

$$= \frac{1}{18} MB^2 \qquad \text{---------- (16)}$$

ในทำนองเดียวกัน โมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปสามเหลี่ยมมุมฉากแบบแผ่นบาง ฐาน A สูง B รอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลขนานกับแนวแกน Y ได้ดังนี้

$$I_{Y_{CM}} = \frac{1}{18} MA^2 \qquad \text{---------- (17)}$$

และจากสมการที่ (11)

$$I_{Z_{CM}} = I_{X_{CM}} + I_{Y_{CM}}$$

$$= \frac{1}{18}MB^2 + \frac{1}{18}MA^2$$

$$= \frac{1}{18}M\left(A^2 + B^2\right) \quad \text{----------} \ (18)$$

3. โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วแบบแผ่นบาง

กรณีของวัตถุรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วแบบแผ่นบาง การหาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวล สามารถหาได้เช่นเดียวกับโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปสามเหลี่ยมมุมฉากแบบแผ่นบาง

สูตรสำเร็จตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวล (X_{CM}, Y_{CM}) และค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบาง ($I_{Z_{CM}}$)

ในงานวิจัยนี้ จะศึกษาการหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวล (Iz_{cm}) ของวัตถุรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบางจำนวน 3 รูปแบบ ได้แก่ รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า สามเหลี่ยมมุมฉาก และสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ซึ่งจากการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ วัตถุรูปเรขาคณิตทั้งสามมีตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวล และค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวล ดังแสดงในตาราง 1

ตาราง 1 ตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวล และค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวล ของวัตถุรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบาง

รูปของแผ่นบาง	จุดศูนย์กลางมวล (C.M.)	โมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวล (Iz_{cm})
สี่เหลี่ยมผืนผ้า กว้าง B ยาว A มวล M	$\left(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}\right)$	$\frac{1}{12}M\left(A^2 + B^2\right)$
สามเหลี่ยมมุมฉาก ฐานยาว A สูง B มวล M	$\left(\frac{2A}{3}, \frac{B}{3}\right)$	$\frac{1}{18}M\left(A^2 + B^2\right)$
สามเหลี่ยมหน้าจั่ว ฐานยาว 2B สูง A มวล M	$\left(\frac{2A}{3}, 0\right)$	$\frac{1}{18}M\left(A^2 + B^2\right)$

ทฤษฎีแกนขนานของสไตน์เนอร์ (Steiner's Parallel Axis Theorem)

ถ้าวัตถุมวล M มีโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลเป็น I_{CM} จะได้ว่า โมเมนต์ความเฉื่อย I ของวัตถุนี้รอบแกนใด ๆ ซึ่งขนานกับแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลและอยู่ห่างกันเป็นระยะ d มีค่าเป็น

$$I = I_{CM} + Md^2 \qquad \text{----------} \ (19)$$

เมื่อ I คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุ มีหน่วยเป็นกิโลกรัม·เมตร^2

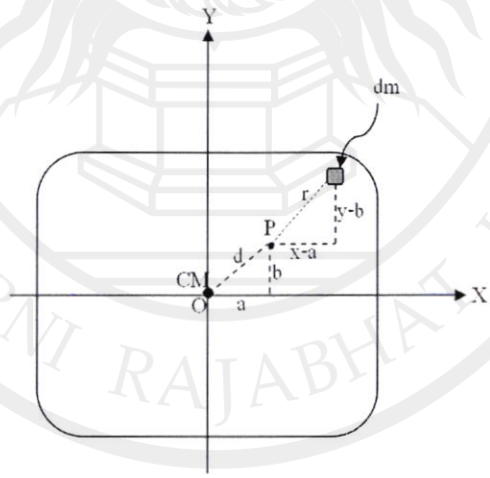
I_{CM} คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลมีหน่วยเป็นกิโลกรัม·เมตร^2

M คือ มวลของวัตถุ มีหน่วยเป็นกิโลกรัม

d คือ ระยะห่างในแนวขนานวัดจากจุดศูนย์กลางมวลมีหน่วยเป็นเมตร

สมการ (19) ถูกเรียกว่า ทฤษฎีแกนขนาน (Parallel Axis Theorem) ค้นพบโดยจาคอป สไตน์เนอร์ (Jakob Steiner) นักคณิตศาสตร์ชาวสวิสเซอร์แลนด์

การพิสูจน์ทฤษฎีแกนขนานของสไตน์เนอร์



ภาพประกอบ 8 ทฤษฎีแกนขนานของสไตน์เนอร์

ที่มา : ธีระพันธ์ สันติเทวกุล. 2547 : 342

จากภาพประกอบ 8 ให้ O เป็นจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุใด ๆ โดยตั้งแกน X, Y, Z ให้อยู่ที่จุดกำเนิด O ดังรูป โดยแกน Z พุ่งออกจากหน้ากระดาษ

เมื่อ I_{CM} คือ โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล (แกน Z)

I คือ โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนที่ขนานกับแกน Z ผ่านจุด P

โดยระยะตามแนวแกน X และ Y ของจุด P มีค่า a และ b ตามลำดับ

โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุก้อนนี้รอบแกนซึ่งผ่านจุด P หาได้จาก

$$I = \int r^2 dm$$

$$= \int\left[(x-a)^2 + (y-b)^2\right]dm$$

โดยการอินทิเกรต เป็นการอินทิเกรตทั้งก้อนวัตถุ กระจายพจน์และจัดรูปจะได้ว่า

$$I = \int\left(x^2 + y^2\right)dm - 2a\int xdm - 2b\int ydm + \int\left(a^2 + b^2\right)dm$$

จากนิยามของจุดศูนย์กลางมวล

$$X_{CM} = \frac{\int xdm}{M}$$

แต่เนื่องจากตั้งแกนให้จุดกำเนิดทับกับจุดศูนย์กลางมวล แสดงว่า $X_{CM} = 0$ ทำให้ได้ว่า $\int xdm = 0$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ $\int ydm = 0$ ดังนั้น เราเขียนสมการใหม่ได้ คือ

$$I = \int\left(x^2 + y^2\right)dm + \int\left(a^2 + b^2\right)dm$$

$$= I_{CM} + M\left(a^2 + b^2\right)$$

$$= I_{CM} + Md^2$$

ลูกตุ้มฟิสิกัล (Physical Pendulum)

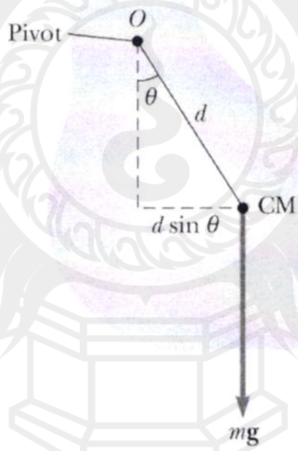
ลูกตุ้มฟิสิกัล ประกอบด้วยวัตถุแข็งเกร็งที่มีขนาด และแกว่งรอบแกนราบอันหนึ่ง จากภาพประกอบ 9 จุดศูนย์กลางมวลอยู่ห่างจากจุดหมุนเป็นระยะ $d\sin\theta$ และทำมุม θ กับแนวดิ่ง ทอร์กที่กระทำกับวัตถุในทิศที่ทำให้วัตถุกลับสู่ตำแหน่งสมดุล คือ

$$\tau = -mgd\sin\theta \qquad \text{---------- (20)}$$

เมื่อ τ คือ ทอร์กที่ดึงวัตถุกลับสู่ตำแหน่งสมดุลมีหน่วยเป็นนิวตัน·เมตร

mg คือ น้ำหนักของวัตถุมีหน่วยเป็นนิวตัน

$d\sin\theta$ คือ ระยะจากจุดศูนย์กลางมวลถึงจุดหมุนในแนวตั้งฉากมีหน่วยเป็นเมตร



ภาพประกอบ 9 ลูกตุ้มฟิสิกัล

ที่มา : Serway and Jewett. 2004 : 469

และจากนิยามของทอร์ก

$$\tau = I\alpha$$

$$= I\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad \text{---------- (21)}$$

เมื่อ τ คือ ทอร์กที่ดึงวัตถุกลับสู่ตำแหน่งสมดุลมีหน่วยเป็นนิวตัน·เมตร

I คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุมีหน่วยเป็นกิโลกรัม·เมตร^2

α คือ ความเร่งเชิงมุมของวัตถุมีเรเดียน/วินาที^{2}

θ คือ มุมที่เบนไปจากแนวสมดุลมีหน่วยเป็นเรเดียน

จากสมการ (20) และ (21) จะได้

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgd\sin\theta \qquad \text{----------} \ (22)$$

จัดรูปสมการใหม่ได้ว่า

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd\sin\theta}{I} = 0 \qquad \text{----------} \ (23)$$

จากเอกลักษณ์ทางตรีโกณมิติ เมื่อ θ เป็นมุมเล็ก ๆ จะได้ว่า $\sin\theta \approx \theta$ จะได้สมการการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายคือ

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\theta = 0 \qquad \text{----------} \ (24)$$

เมื่อเปรียบเทียบกับรูปทั่วไปของสมการการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \qquad \text{----------} \ (25)$$

จะพบว่า

$$\omega^2 = \frac{mgd}{I} \qquad \text{----------} \ (26)$$

จากนิยามของความถี่เชิงมุม

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$= \sqrt{\frac{mgd}{I}} \quad \text{---------- (27)}$$

นั่นคือ

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

และได้ว่า

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \quad \text{---------- (28)}$$

เมื่อ T คือ คาบการเคลื่อนที่ของลูกตุ้มฟิสิกัล มีหน่วยเป็นวินาที
I คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุ มีหน่วยเป็นกิโลกรัม·เมตร^2
m คือ มวลของวัตถุแข็งเกร็ง มีหน่วยเป็นกิโลกรัม
g คือ ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก มีหน่วยเป็นเมตร/วินาที^{2}
d คือ ระยะที่วัดจากจุดศูนย์กลางมวล มีหน่วยเป็นเมตร

ซึ่งในการทดลองนี้จะแกว่งวัตถุ โดยมีจุดแขวนอยู่ห่างจากตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลเป็นระยะ d เพื่อหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนที่ตั้งฉากกับระนาบของแผ่นบาง และนำไปคำนวณย้อนกลับ ด้วยทฤษฎีแกนขนานของสไตน์เนอร์ เพื่อหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของแผ่นบาง ($I_{Z_{CM}}$) โดยปรับรูปสมการให้เป็น

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{Z_{CM}} + md^2}{mgd}} \quad \text{---------- (29)}$$

เมื่อ $I_{Z_{CM}}$ คือ โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนตั้งฉากกับระนาบที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล มีหน่วยเป็นกิโลกรัม·เมตร^2

เมื่อจัดรูปสมการ จะหาค่า $I_{Z_{CM}}$ ได้คือ

$$I_{Z_{CM}} = \frac{mgdT^2}{4\pi^2} - md^2 \quad \text{---------- (30)}$$

แนวโน้มของคาบเวลาเมื่อเลื่อนตำแหน่งออกตามแนวขนานวัดจากจุดศูนย์กลางมวล

จากสมการ (30)

$$I_{Z_{CM}} = \frac{mgdT^2}{4\pi^2} - md^2$$

จัดรูปสมการให้อยู่ในรูปสมการกำลังสอง $Ax^2 + Bx + C = 0$ จะได้

$$md^2 - \frac{mgdT^2}{4\pi^2} + I_{Z_{CM}} = 0 \quad \text{---------- (31)}$$

จะพบว่าสมการอยู่ในรูปสมการพหุนามกำลังสอง ที่ให้รูปกราฟเป็นพาราโบลาหงาย ซึ่งต้องมีค่าระยะแนวขนานวัดจากจุดศูนย์กลางมวล d ที่ทำให้คาบเวลาในการแกว่ง T มีค่าน้อยที่สุดเกิดขึ้น (จุดต่ำสุดของโค้งที่ยอดพาราโบลา) ซึ่งหาค่าระยะ d ได้ โดยการหาอนุพันธ์ของ T เทียบกับ d และหาจุดวิกฤตของระยะ d โดยการให้อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งมีค่าเป็นศูนย์

$$\frac{d}{dd}(T) = \frac{d}{dd}\left(2\pi\sqrt{\frac{I_{Z_{CM}} + md^2}{mgd}}\right) = 0 \quad \text{---------- (32)}$$

นั่นคือ

$$2\pi\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{I_{Z_{CM}} + md^2}{mgd}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{mgd(2md) - \left(I_{Z_{CM}} + md^2\right)(mg)}{(mgd)^2}\right) = 0$$

จัดรูปสมการให้ง่ายขึ้น

$$\frac{\pi\left(\dfrac{mgd(2md)-\left(I_{Z_{CM}}+md^2\right)(mg)}{(mgd)^2}\right)}{\sqrt{\left(\dfrac{I_{Z_{CM}}+md^2}{mgd}\right)}} = 0$$

กระจายพจน์ต่าง ๆ จะได้

$$\frac{mg\pi\left(md^2-I_{Z_{CM}}\right)}{(mgd)^2\sqrt{\left(\dfrac{I_{Z_{CM}}+md^2}{mgd}\right)}} = 0$$

จะพบว่า

$$md^2 - I_{Z_{CM}} = 0 \qquad \text{---------- (33)}$$

นั่นคือ

$$d_T = \pm\sqrt{\frac{I_{Z_{CM}}}{m}} \qquad \text{---------- (34)}$$

จากทฤษฎีบทแกนขนานของสไตน์เนอร์

$$I = I_{CM} + md^2$$

แทนค่า $d = \pm\sqrt{\dfrac{I_{Z_{CM}}}{m}}$ จากสมการ (34) ลงในสมการ (19) จะพบว่า

$$I_Z = I_{Z_{CM}} + m\left(\pm\sqrt{\frac{I_{Z_{CM}}}{m}}\right)^2 = 2I_{Z_{CM}} \qquad \text{---------- (35)}$$

นั่นคือ ตำแหน่ง d ใด ใดที่ให้ค่า $I_Z = 2I_{Z_{CM}}$ จะเป็นตำแหน่งที่ทำให้เกิดคาบน้อยที่สุด

ในกรณีของสี่เหลี่ยมผืนผ้า $I_{Z_{CM}} = \frac{1}{12}m\left(A^2+B^2\right)$

ระยะ d ที่ทำให้ T น้อยที่สุดจึงเป็น

$$d_T = \sqrt{\frac{\frac{1}{12}m\left(A^2+B^2\right)}{m}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{\left(A^2+B^2\right)} \qquad \text{---------- (36)}$$

ในกรณีของสามเหลี่ยมมุมฉากและสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $I_{Z_{CM}} = \frac{1}{18}m\left(A^2+B^2\right)$
ระยะ d ที่ทำให้ T น้อยที่สุดจึงเป็น

$$d_T = \sqrt{\frac{\frac{1}{18}m\left(A^2+B^2\right)}{m}}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{\left(A^2+B^2\right)} \qquad \text{---------- (37)}$$

อะคริลิก

อะคริลิกพลาสติกหรือโพลิเมทิลเมทาไครเลต หรือ PPMA เป็นเทอร์โมพลาสติกชนิดหนึ่ง มีชื่อทางการค้าหลายชื่อด้วยกัน เช่น Plexiglas, Lucite, Perspex เป็นต้น และสูตรเคมีของพลาสติกชนิดนี้คือ $C_5H_8O_2$ พลาสติกชนิดนี้ถูกนำมาประยุกต์ใช้ในงานหลายอย่าง เช่น กระจกหน้าต่างบนเครื่องบิน ป้ายโฆษณา กระจกตู้ปลา วัสดุทางการแพทย์ เป็นต้น เนื่องจากวัสดุมีสมบัติโดดเด่นในเรื่องความเหนียว (Toughness) สามารถขึ้นรูปได้ง่าย นอกจากนั้นยังมีค่าความหนาแน่นต่ำ ซึ่งเป็นสมบัติประจำตัวของวัสดุประเภทพลาสติกแล้ว อะคริลิกพลาสติกจึงเป็นวัสดุชนิดหนึ่งที่นิยมนำมาใช้แทนแก้วในงานหลายอย่าง มีความหนาแน่นประมาณ 1.15 - 1.19 กรัม/ลูกบาศก์เซนติเมตร โดยมีจุดหลอมเหลวที่อุณหภูมิ 130 - 140 องศาเซลเซียส และจุดเดือดที่อุณหภูมิ 200 องศาเซลเซียสขึ้นไป มีความทนทานต่อการกระแทก (Impact Strength) สูงกว่าแก้ว แต่ต่ำกว่าโพลิคาร์บอเนต

และพลาสติกวิศวกรรมชนิดอื่น มีเนื้ออ่อนจึงเกิดรอยขูดขีดได้ง่าย มีความทนทานต่อสภาพแวดล้อมดีกว่าพลาสติกชนิดอื่นเช่น โพลิคาร์บอเนต จึงนิยมใช้อะคริลิกพลาสติกกับงานกลางแจ้ง

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยในประเทศ

จรัส บุญยธรรมมา (ออนไลน์. 2545) ได้ทำการทดลองหาโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลที่มีลักษณะไม่ต่อเนื่อง โดยการหมุนมวลบนจานหมุน และทำการทดลองหาความเร่งของระบบ เมื่อได้ค่าความเร่งแล้ว จึงนำไปหาโมเมนต์ความเฉื่อยได้จากสูตร

$$I_{CM} = \frac{m(g-a)R^2}{a}$$

และกล่าวถึงความแตกต่างระหว่างการหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลที่มีลักษณะไม่ต่อเนื่อง และการหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลที่มีลักษณะต่อเนื่องไว้ว่า

“$I = \sum m_i r_i^2$ เป็นสมการที่หาโมเมนต์ความเฉื่อยในกรณีที่มวลเป็นจุด แต่ถ้ามวลมีรูปทรงขนาดใหญ่ และเนื้อวัตถุกระจายอย่างสม่ำเสมอ จะต้องใช้วิธีการอินทิกรัลแทน โดยแบ่งมวลของวัตถุออกเป็นชิ้นเล็ก ๆ มีค่า dm อยู่ห่างจากแกนหมุนเป็นระยะ r โมเมนต์ความเฉื่อยของอนุภาคเล็ก ๆ นี้จะเป็น $I = \int r^2 dm$ และถ้า ρ เป็นความหนาแน่นของวัตถุ และ dV เป็นปริมาตรเล็ก ๆ $dm = \rho dV$ เมื่อแทนค่าในสมการ จะได้ว่า $I = \int r^2 \rho dV$ ”

งานวิจัยต่างประเทศ

Peter E. Banks (1994 : 389) ได้ทำการหาโมเมนต์ความเฉื่อยจากท่อ PVC โดยการนำท่อมาต่อกันเป็นรูปตัวที แล้วติดกับรอกจากนั้นใช้มวลถ่วงเพื่อหาอัตราเร็ว แล้วนำมาเขียนกราฟระหว่างอัตราเร็วกับเวลา ได้ค่าความชันคืออัตราเร่งของวัตถุ จากนั้นนำไปหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยเปรียบเทียบกับค่าคำนวณทางทฤษฎี

Charles J. Burstone (1998 : 426 - 431) ได้ทำการทดลองหาโมเมนต์ความเฉื่อยเปรียบเทียบกับการคำนวณทางทฤษฎีโดยใช้ไม้วางตั้งกับพื้นแล้วแกว่งให้โยกแบบตุ๊กตาล้มลุก ซึ่งใช้นาฬิกาจับเวลาในการโยกครบรอบและนำไปเปรียบเทียบกับการคำนวณ โมเมนต์ความเฉื่อยซึ่งใช้ทฤษฎีแกนขนาน ทำให้ได้ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางที่ใกล้เคียงกับค่าทางทฤษฎี

Russeva, Tsutsumanova and Russev (2010 : 59 - 62) ได้ทำการทดลองตรวจสอบทฤษฎีแกนขนานของ สไตน์เนอร์ ได้ศึกษาทดลอง ตรวจสอบทฤษฎีแกนขนานของสไตน์เนอร์ โดยใช้วัตถุแผ่นบางรูปปลาวาฬเป็นลูกตุ้มฟิสิกัล หาตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลด้วยวิธีสุ่มหาและวางวัตถุลงบน

ปลายเข็ม จากนั้นทำการเจาะรูรอบวัตถุแผ่นบางรูปปลาวาฬ จำนวน 7 รู ที่มีระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวลไม่เท่ากัน และปล่อยให้ลูกตุ้มฟิสิกัลรูปปลาวาฬนี้ผลการวิจัยพบว่า นำค่าคาบการแกว่ง มาเขียนกราฟระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางมวล ซึ่งให้กราฟเป็นพาราโบลาหงาย และเขียนกราฟอีกรูปหนึ่งคือ ค่าคาบการแกว่งกำลังสองคูณระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวลกับระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางมวลยกกำลังสอง ($T^2 \cdot d$ กับ d^2) ซึ่งได้กราฟเป็นเส้นตรงมีความชันเป็นบวก โดยได้วิเคราะห์กราฟเพื่อหาค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก ซึ่งพบว่ามีค่า 9.8 ± 0.5 เมตร·วินาที$^{-2}$ และอัตราส่วนระหว่าง $I_{Z_{CM}}/m$ คือ 0.014 ± 0.0005 เมตร^2 และขณะที่มวล 26 กรัม จะได้ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยที่ $(0.27 \pm 0.01) \times 10^{-3}$ กิโลกรัม·เมตร$^{-2}$

อุปกรณ์และวิธีการ

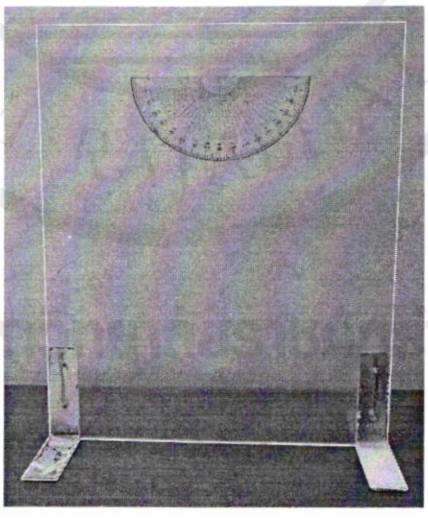
งานวิจัยนี้เป็นการออกแบบชุดทดลองฟิสิกัลเพนดูลัมรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบาง เพื่อหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุแบบแผ่นบาง 3 รูปทรง ได้แก่ รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า สามเหลี่ยมมุมฉาก และสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เพื่อตรวจสอบทฤษฎีแกนขนานและแนวโน้มของตำแหน่งที่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวล ที่ทำให้ได้คาบการแกว่งต่ำสุด โดยมีอุปกรณ์ วิธีการวิจัย และสถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ผล ดังนี้

1. อุปกรณ์
2. วิธีการวิจัย
   2.1 การออกแบบชุดทดลอง
   2.2 การเตรียมแผ่นอะคริลิก สำหรับใช้เป็นลูกตุ้มฟิสิกัล
   2.3 ขั้นทดลอง
   2.4 ขั้นวิเคราะห์ผล
3. สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ผล

อุปกรณ์

อุปกรณ์ที่ใช้ ประกอบด้วย

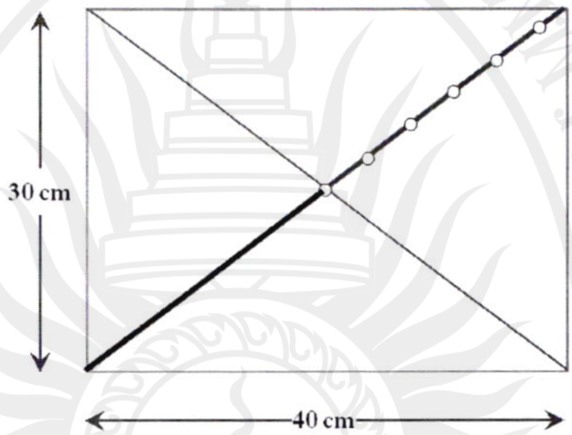
1. ชุดทดลองพร้อมขาตั้งทำจากแผ่นอะคริลิกใส หนา 1.00 เซนติเมตร มีความกว้าง 55.00 เซนติเมตร สูง 65.00 เซนติเมตร ด้านบนติดเข็มเย็บผ้าเบอร์ 15 สำหรับแขวนวัตถุแผ่นบาง และมีสติ๊กเกอร์ครึ่งวงกลมสำหรับวัดมุมติดอยู่ ดังภาพประกอบ 10



ภาพประกอบ 10 ชุดทดลองฟิสิกัลเพนดูลัม

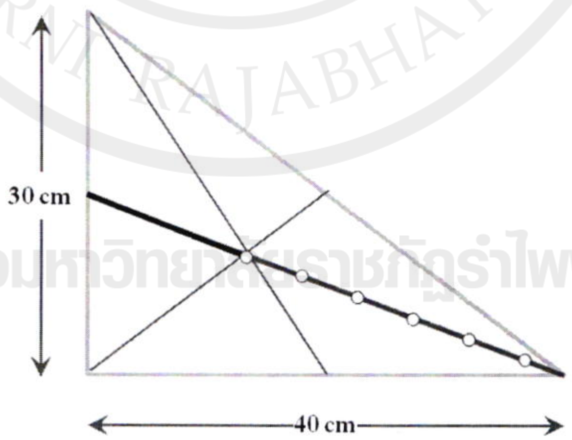
2. แผ่นอะคริลิก สำหรับใช้เป็นลูกตุ้มฟิสิกัล ความหนา 3 มิลลิเมตร ตัดให้เป็นรูปเรขาคณิตแบบต่าง ๆ ดังนี้

2.1 รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า มีความกว้าง 30.00 เซนติเมตร ความยาว 40.00 เซนติเมตร มวล 421.25 กรัม มีตำแหน่งเจาะรูขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 2 มิลลิเมตร ทุก ๆ ระยะ 4.50 เซนติเมตร ตามแนวทแยงมุมที่ชี้จากศูนย์กลางมวลไปยังมุมของสี่เหลี่ยม ดังภาพประกอบ 11



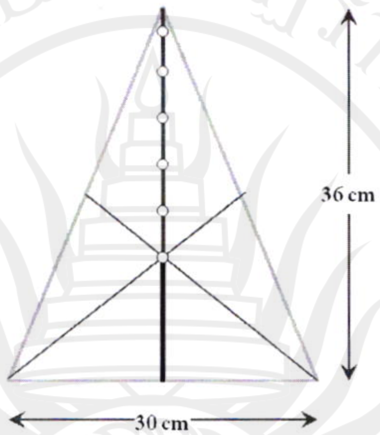
ภาพประกอบ 11 แผ่นอะคริลิกรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า สำหรับใช้เป็นลูกตุ้มฟิสิกัล

2.2 รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มีความยาวฐาน 40.00 เซนติเมตร ความสูง 30.00 เซนติเมตร มวล 207.30 กรัม มีตำแหน่งเจาะรูขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 2 มิลลิเมตร ทุก ๆ 5.00 เซนติเมตร ตามแนวที่ชี้จากจุดศูนย์กลางมวลไปยังมุมระหว่างฐานของสามเหลี่ยม และด้านตรงข้ามมุมฉาก ดังภาพประกอบ 12



ภาพประกอบ 12 แผ่นอะคริลิกรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก สำหรับใช้เป็นลูกตุ้มฟิสิกัล

2.3 รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ความยาวฐาน 30.00 เซนติเมตร ความสูง 36.00 เซนติเมตร มวล 196.30 กรัม มีตำแหน่งเจาะรูขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 2 มิลลิเมตร ทุก ๆ 4.00 เซนติเมตร ตามแนวที่ชี้จากจุดศูนย์กลางมวลไปยังยอด ดังภาพประกอบ 13



ภาพประกอบ 13 แผ่นอะคริลิกรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว สำหรับใช้เป็นลูกตุ้มฟิสิกัล

3. เครื่องชั่งแบบดิจิตอล พิกัดการวัด 400 กรัม ความละเอียด 0.01 กรัม ดังภาพประกอบ 14

ภาพประกอบ 14 เครื่องชั่งแบบดิจิตอล พิกัดการวัด 400 กรัม ความละเอียด 0.01 กรัม

4. นาฬิกาจับเวลา ความละเอียด 0.01 วินาที ดังภาพประกอบ 15

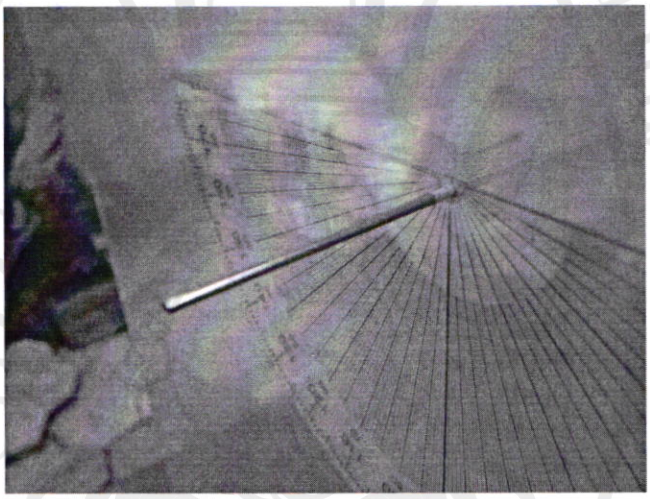
ภาพประกอบ 15 นาฬิกาจับเวลา ความละเอียด 0.01 วินาที

วิธีการวิจัย

การออกแบบชุดทดลอง

1. ออกแบบลักษณะชุดทดลอง ให้เป็นแท่นทำจากแผ่นอะคริลิกใส ความหนา 1.00 เซนติเมตร มีขนาดความกว้าง 55.00 เซนติเมตร ความสูง 65.00 เซนติเมตร และมีขาตั้งสองข้างทำจากเหล็ก

2. ติดแผ่นครึ่งวงกลมอุปกรณ์วัดมุม และเข็มเย็บผ้า ซึ่งเข็มเย็บผ้าทำหน้าที่เป็นจุดแขวนวัตถุ ดังภาพประกอบ 16



ภาพประกอบ 16 การติดแผ่นครึ่งวงกลม และเข็มเย็บผ้าเข้ากับแท่นอะคริลิก

การเตรียมแผ่นอะคริลิก สำหรับใช้เป็นลูกตุ้มฟิสิกัล

1. ตัดแผ่นอะคริลิกแบบแผ่นบางให้มีรูปร่างและขนาดต่าง ๆ กัน ตามที่ระบุในข้อ 2.1 - 2.3 ในหัวข้ออุปกรณ์

2. หาตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลของแผ่นอะคริลิกในข้อ 1 ทำเครื่องหมายแสดงตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลของแผ่นอะคริลิกแต่ละแผ่น

3. ลากเส้นตรง จากตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวล ไปยังทุกมุมบนแผ่นอะคริลิก

4. เลือกเส้นตรงที่มีความยาวมากที่สุดบนแผ่นอะคริลิกเป็นแนวในการเจาะรู

5. วัดระยะจากจุดศูนย์กลางมวลออกไปตามเส้นตรงที่มีความยาวมากที่สุด โดยทำเครื่องหมายทุก ๆ 4.50 เซนติเมตร สำหรับรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า 5.00 เซนติเมตร สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และ 4.00 เซนติเมตร สำหรับรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

6. ใช้สว่านไฟฟ้าเจาะรูบนแผ่นอะคริลิกตามตำแหน่งที่ทำเครื่องหมายไว้ในข้อ 5

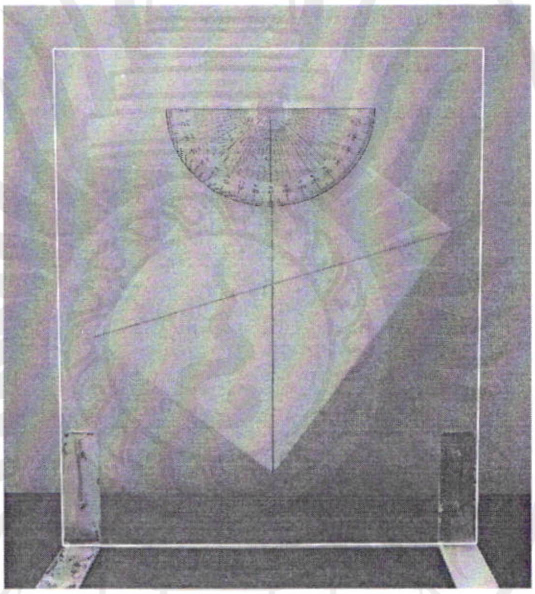
ขั้นทดลอง

ขั้นทดลอง แบ่งการทดลองออกเป็น 2 ขั้นตอน

ตอนที่ 1 ทำการทดลองหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวล ($I_{Z_{CM}}$) ของวัตถุรูปเลขาคณิตแบบแผ่นบาง เพื่อตรวจสอบทฤษฎีแกนขนาน

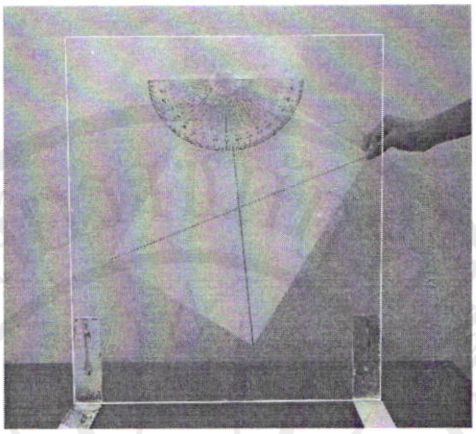
1. ชั่งมวลของแผ่นอะคริลิกแต่ละแผ่น ด้วยเครื่องชั่งแบบดิจิตอล บันทึกผล

2. แขวนแผ่นอะคริลิกรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าไว้กับเข็มบนชุดทดลอง โดยเลือกรูที่อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวลมากที่สุดเป็นจุดแรกในการแขวน ดังภาพประกอบ 17



ภาพประกอบ 17 การแขวนแผ่นอะคริลิกรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ตำแหน่งรูเจาะแรก ที่อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวลมากที่สุด

3. ดึงแผ่นอะคริลิกรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่แขวนอยู่กับเข็ม ออกจากตำแหน่งสมดุลเป็นมุมน้อย ๆ (ไม่เกิน 5 องศา) และปล่อยให้วัตถุแกว่งไป - กลับแบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย พร้อมจับเวลาการแกว่ง ไป - กลับ ของแผ่นอะคริลิก เป็นจำนวน 20 รอบ บันทึกเวลาการแกว่งลงในตารางบันทึกผล ดังภาพประกอบ 18



ภาพประกอบ 18 การดึงแผ่นอะคริลิกรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าออกจากตำแหน่งสมดุลเป็นมุมน้อย ๆ

4. ทำการปล่อยแผ่นอะคริลิกรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าให้แกว่งอย่างอิสระ พร้อมจับเวลาการแกว่งไป - กลับ โดยทำการดึงและปล่อย ดังข้อ 3 - 4 อีกจำนวน 4 ครั้ง

5. เปลี่ยนตำแหน่งแขวนจากข้อ 2 โดยเลื่อนจุดแขวนมายังรูที่ใกล้กับจุดศูนย์กลางมวลมากขึ้นอีก 1 ช่วง และทำการทดลองซ้ำตามข้อ 3 - 4 จนครบ 5 ตำแหน่ง

6. เปลี่ยนแผ่นอะคริลิกเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ทำการทดลองและบันทึกผลเช่นเดียวกับแผ่นอะคริลิกรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ตอนที่ 2 ทำการทดลองหาคาบการแกว่งต่ำสุด ณ ตำแหน่งที่คำนวณได้จากสูตรทางทฤษฎี เพื่อตรวจสอบแนวโน้มของตำแหน่งที่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวล ที่ทำให้ได้คาบการแกว่งต่ำสุด

1. เจาะรูที่ระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวลที่ทำให้เกิดคาบการแกว่งต่ำสุดทางทฤษฎี (d_T) หรือตำแหน่งที่ทำให้ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยที่ตั้งได้ฉาก มีค่าเป็นสองเท่าของโมเมนต์ความเฉื่อยที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล เพิ่มอีก 1 จุดบนแผ่นอะคริลิกรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า สามเหลี่ยมมุมฉาก และสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

2. แขวนและปล่อยให้แกว่งที่ตำแหน่งนี้ 20 รอบ จำนวน 5 ครั้ง บันทึกผล

3. ทำการทดลอง เช่นเดียวกันดังข้อ 2 กับแผ่นอะคริลิกรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ตามลำดับ

ขั้นวิเคราะห์ผล

จากผลการทดลองตอนที่ 1 มีขั้นตอนการวิเคราะห์และสรุปผล ดังนี้

1. นำค่าเวลาในการแกว่ง 20 รอบ ของแผ่นอะคริลิกแต่ละรูปแบบมาหาคาบของการแกว่งในแต่ละครั้งของการทดลอง บันทึกผล

2. นำค่าคาบที่ได้จากการแกว่งทั้ง 5 ครั้งของการทดลอง มาหาค่าคาบเฉลี่ย (T_{AV}) โดยคำนวณหาค่าคาบเฉลี่ยทั้ง 5 ตำแหน่งของแผ่นอะคริลิกแต่ละรูปแบบ

3. นำค่าคาบเฉลี่ยที่ได้จากข้อ 2 แทนในสมการ $I_{Z_{CM}} = \frac{mgdT^2}{4\pi^2} - md^2$ เพื่อหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวล ($I_{Z_{CM}}$) ของแผ่นอะคริลิกรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า สามเหลี่ยมมุมฉาก และสามเหลี่ยมหน้าจั่ว บันทึกผล

4. ตรวจสอบค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวล ($I_{Z_{CM}}$) ของแผ่นอะคริลิกรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า สามเหลี่ยมมุมฉาก และสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยแทนค่ามวลของวัตถุ ความกว้าง ความยาว ในสูตรคำนวณทางทฤษฎี บันทึกผล

5. เปรียบเทียบค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวล ($I_{Z_{CM}}$) ของแผ่นอะคริลิกรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า สามเหลี่ยมมุมฉาก และสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ที่ได้จากการทดลองในข้อ 3 กับค่าที่ได้จากสูตรคำนวณทางทฤษฎีในข้อ 4 เพื่อหาค่าร้อยละความคลาดเคลื่อนตามสมการ

$$\text{ร้อยละความคลาดเคลื่อน} = \left|\frac{\text{ค่าที่วัดได้ - ค่าจริง}}{\text{ค่าจริง}}\right| \times 100\%$$

ต่อไปนี้ เป็นวิธีการหาระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวลที่ทำให้ได้คาบการแกว่งต่ำสุดจากการหาค่าวิกฤต (d_C) โดยนำค่าที่ได้นี้และระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวลที่ทำให้ได้คาบการแกว่งต่ำสุดจากการทดลอง (d_E) ไปเปรียบเทียบกับระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวลที่ทำให้ได้คาบการแกว่งต่ำสุดทางทฤษฎี (d_T) เพื่อนำไปเป็นข้อมูลในการตรวจสอบผลการทดลองต่อไป

1. นำค่าคาบการแกว่งจากการทดลองตอนที่ 1 กับระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวลมาเขียนกราฟด้วยโปรแกรม Microsoft Excel ซึ่งในกราฟแสดงค่า d_E (ตำแหน่งข้อมูลที่ทำให้เกิดคาบการแกว่งต่ำสุด)

2. สร้างเส้นแนวโน้มในสองรูปแบบคือ สมการพหุนามกำลังสอง และสมการพหุนามกำลังสี่ และกำหนดให้มีค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ (R^2) ของเส้นแนวโน้มนั้น ๆ ด้วย

3. หาค่าวิกฤตของสมการ โดยกำหนดให้อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของสมการพหุนามกำลังสอง และสมการพหุนามกำลังสี่ของเส้นแนวโน้มมีค่าเท่ากับศูนย์ ซึ่งจะทำให้ได้ค่า d_C ซึ่งเป็นระยะที่ทำให้ได้คาบการแกว่งต่ำสุดซึ่งเกิดจากการหาค่าวิกฤต

4. เปรียบเทียบค่า d_C และ d_E กับ ค่า d_T (ดูบทที่ 2 หัวข้อที่ 1.9 และภาคผนวก) ซึ่งเป็นตำแหน่งที่ทำให้ได้คาบการแกว่งต่ำสุดในทางทฤษฎี

จากผลการทดลองตอนที่ 2 มีขั้นตอนการวิเคราะห์ผล ดังนี้

1. นำค่าเวลาในการแกว่ง 20 รอบ ของแผ่นอะคริลิกแต่ละรูปแบบมาหาคาบของการแกว่งในแต่ละครั้งของการทดลอง บันทึกผล

2. นำค่าคาบที่ได้จากการแกว่งทั้ง 5 ครั้งของการทดลอง มาหาค่าคาบเฉลี่ยของแผ่นอะคริลิกแต่ละรูปแบบ ซึ่งคาบเฉลี่ยนี้จะเป็นคาบการแกว่งต่ำสุดทางทฤษฎี ($T_{MIN\text{-}THOERY}$) บันทึกผล

3. เปรียบเทียบคาบการแกว่งต่ำสุดทางทฤษฎี ($T_{MIN\text{-}THOERY}$) กับคาบการแกว่งต่ำสุดที่เกิดจากการแทนค่าระยะ d_C ลงในสมการพหุนามกำลังสี่ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างคาบการแกว่งและระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวล ($T_{MIN\text{-}CRISIS}$)

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ผล

ในงานวิจัยนี้ ใช้สถิติในการคำนวณผลการทดลอง จำนวน 1 รายการ ได้แก่ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ซึ่งเป็นค่าที่เกิดจากผลรวมของข้อมูลทั้งหมด หารด้วยจำนวนข้อมูล ดังสมการ

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$$

ซึ่งในการทดลองหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบางรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล จะต้องมีการหาคาบเฉลี่ย ซึ่งได้จากการเฉลี่ยคาบเวลาที่ได้ในแต่ละครั้งของการทดลอง ดังสมการ

$$T_{AV} = \frac{\sum_{i=1}^{N} T_i}{N}$$

ซึ่งการทดลองในแต่ละระยะห่างของรูที่เจาะกับจุดศูนย์กลางมวล จะทำการทดลองจำนวน 3 ครั้ง จึงเขียนรูปแบบการหาค่าคาบเฉลี่ยได้จาก

$$T_{AV} = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5}{5}$$

ผลและการวิจารณ์

การทำการทดลองเพื่อหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า สามเหลี่ยมมุมฉาก และสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยใช้ทฤษฎีแกนขนานด้วยชุดทดลองฟิสิกัลเพนดูลัม ได้ผลการทดลองดังนี้

1. ผลการทดลองการหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ข้อมูลของวัตถุแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

มวล (m)	421.25	กรัม	เทียบเท่ากับ	0.421	กิโลกรัม
กว้าง (A)	30.0	เซนติเมตร	เทียบเท่ากับ	0.300	เมตร
ยาว (B)	40.0	เซนติเมตร	เทียบเท่ากับ	0.400	เมตร

ค่าความเร่งเนื่องจากความโน้มถ่วงของโลก (g) 9.805 เมตร/วินาที^{2}

สูตรทางทฤษฎีของค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ($I_{Z_{CM}}$) : $\frac{1}{12}m\left(A^2+B^2\right)$

โมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ($I_{Z_{CM}}$) ที่เกิดจากแทนค่าในสูตร 0.00877 กิโลกรัม·เมตร^2

ตาราง 2 ผลการหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ตำแหน่งที่	ระยะ d (เมตร)	ครั้งที่	จำนวนรอบการแกว่ง (รอบ)	เวลาที่ใช้ (วินาที)	คาบ (วินาที)	คาบเฉลี่ย (วินาที)	ค่า $I_{Z_{CM}}$ จากการทดลอง (กิโลกรัม·เมตร^2)	ค่า $I_{Z_{CM}}$ จากสูตรทางทฤษฎี (กิโลกรัม·เมตร^2)	Error (%)
		1	20	22.62	1.13				
		2	20	22.65	1.13				
1	0.225	3	20	22.66	1.13	1.13	0.00886	0.00877	1.07
		4	20	22.69	1.13				
		5	20	22.58	1.13				
		1	20	21.92	1.10				
		2	20	21.84	1.09				
2	0.180	3	20	21.88	1.09	1.09	0.00890	0.00877	1.52
		4	20	21.87	1.09				
		5	20	21.88	1.09				
		1	20	21.46	1.07				
		2	20	21.49	1.07				
3	0.135	3	20	21.48	1.07	1.07	0.00864	0.00877	1.48
		4	20	21.50	1.08				
		5	20	21.52	1.08				

ตาราง 2 (ต่อ)

ตำแหน่งที่	ระยะ d (เมตร)	ครั้งที่	จำนวนรอบการแกว่ง (รอบ)	เวลาที่ใช้ (วินาที)	คาบ (วินาที)	คาบเฉลี่ย (วินาที)	ค่า $I_{Z_{CM}}$ จากการทดลอง (กิโลกรัม·เมตร^2)	ค่า $I_{Z_{CM}}$ จากสูตรทางทฤษฎี (กิโลกรัม·เมตร^2)	Error (%)
		1	20	22.62	1.13				
		2	20	22.69	1.13				
4	0.0900	3	20	22.66	1.13	1.13	0.00868	0.00877	1.06
		4	20	22.65	1.13				
		5	20	22.66	1.13				
		1	20	28.35	1.42				
		2	20	28.37	1.42				
5	0.0450	3	20	28.4	1.42	1.42	0.00862	0.00877	1.67
		4	20	28.36	1.42				
		5	20	28.37	1.42				

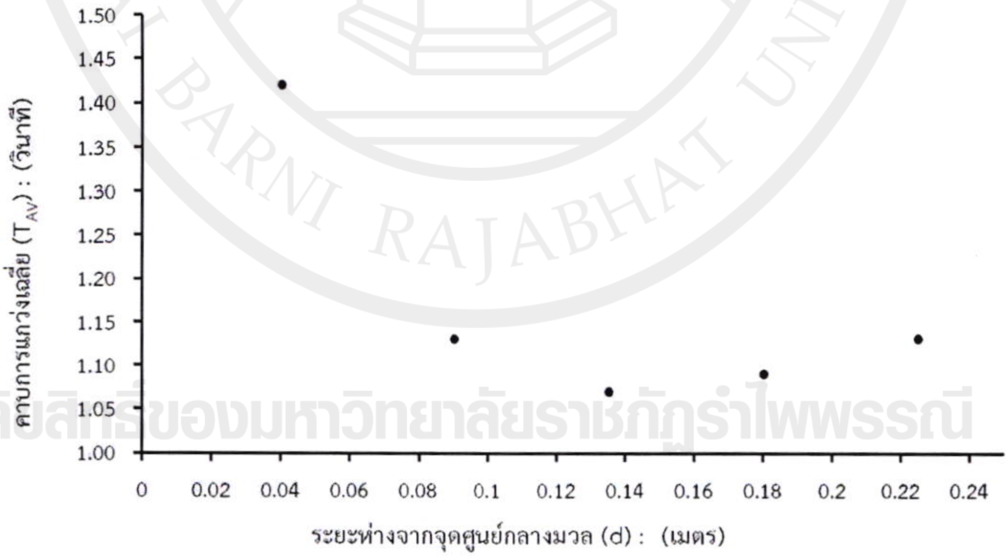
จากตาราง 2 พบว่า ตำแหน่งของจุดแขวนที่มีคาบการแกว่งต่ำสุด คือ ระยะที่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า 13.5 เซนติเมตร มีค่า $I_{Z_{CM}}$ จากการทดลองเท่ากับ 0.00864 กิโลกรัม·เมตร^2 และค่า $I_{Z_{CM}}$ จากสูตรทางทฤษฎี เท่ากับ 0.00877 กิโลกรัม·เมตร^2

เมื่อเขียนกราฟระหว่าง คาบเฉลี่ยในการแกว่ง กับระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวล โดยใช้ข้อมูลดังตาราง 3

ตาราง 3 ความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวล และคาบเฉลี่ยในการแกว่งของวัตถุแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

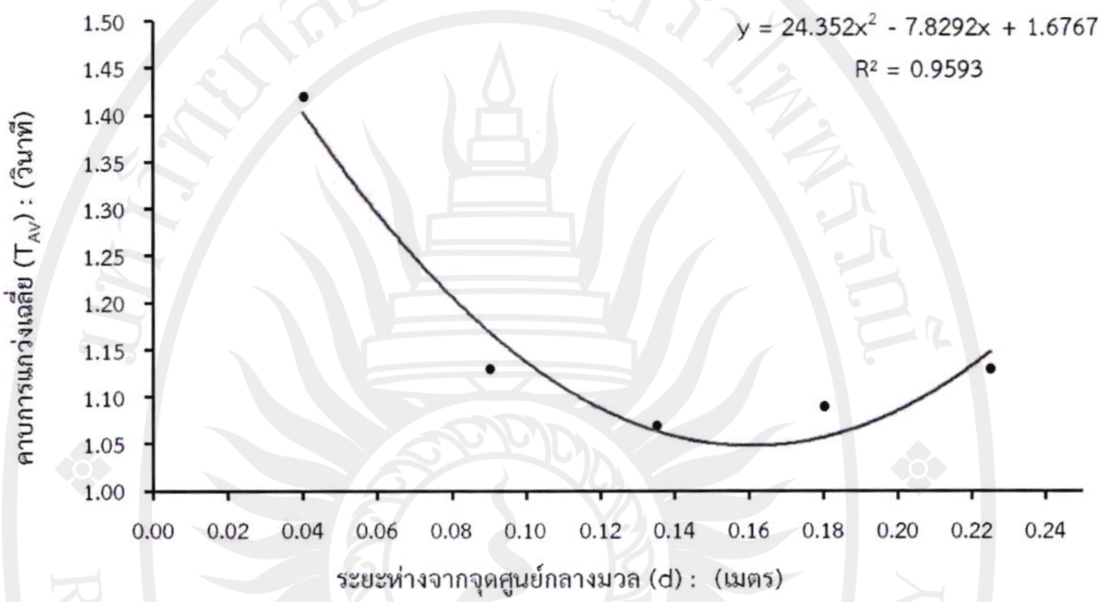
จุดที่	ระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวล (เมตร)	คาบเฉลี่ยในการแกว่ง (วินาที)
1	0.225	1.13
2	0.180	1.09
3	0.135	1.07
4	0.0900	1.13
5	0.0450	1.42

ซึ่งเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวล และคาบเฉลี่ยในการแกว่งของวัตถุแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าได้ ดังภาพประกอบ 19



ภาพประกอบ 19 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวล และคาบเฉลี่ยในการแกว่งของวัตถุแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

เมื่อใช้โปรแกรม Microsoft Excel หาสมการของเส้นแนวโน้ม สองระดับได้แก่ พหุนามกำลังสอง และพหุนามกำลังสี่ ให้รูปสมการ และค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ (R^2) ซึ่งหาระยะห่างจากตำแหน่งศูนย์กลางมวลที่ทำให้คาบเฉลี่ยในการแกว่งมีค่าต่ำสุด ได้ดังภาพประกอบ 20 - 21



ภาพประกอบ 20 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวล และคาบเฉลี่ยในการแกว่งของวัตถุแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า พร้อมเส้นแนวโน้มในรูปสมการพหุนามกำลังสอง

สมการพหุนามกำลังสองคือ $T = 24.352d^2 - 7.8292d + 1.6767$

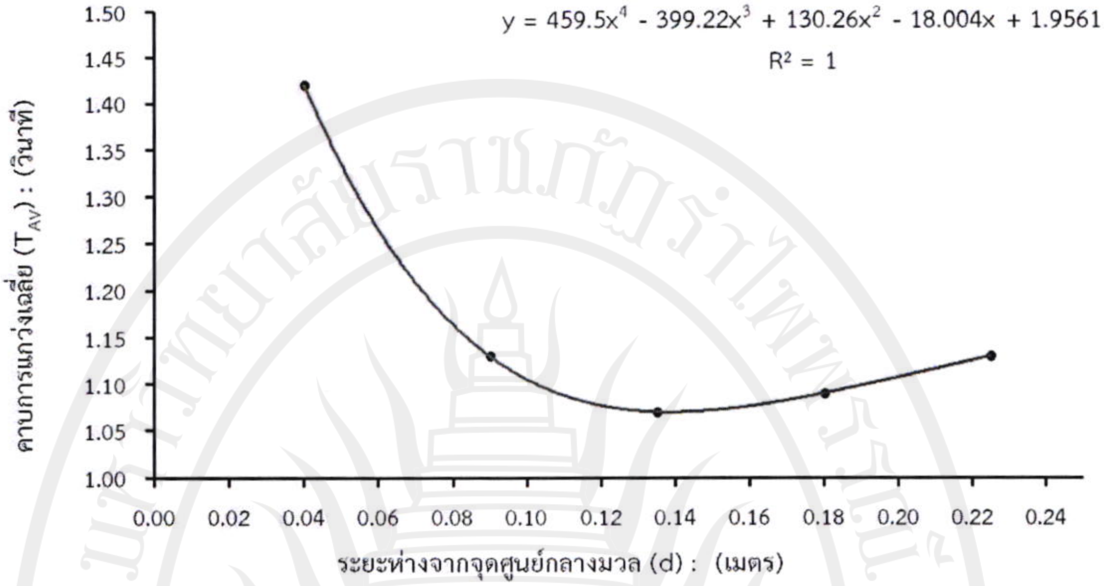
โดยมีค่า $R^2 = 0.9593$

จุดวิกฤต d ที่ทำให้คาบการแกว่งต่ำสุด หาจาก

$$\frac{d}{dd}\left(24.352d^2 - 7.8292d + 1.6767\right) = 0$$

นั่นคือ $48.704d - 7.8292 = 0$

มีคำตอบคือ 0.161 เมตร หรือประมาณ 16.1 เซนติเมตร



ภาพประกอบ 21 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวล และคาบเฉลี่ยในการแกว่งของวัตถุแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า พร้อมเส้นแนวโน้มในรูปสมการพหุนามกำลังสี่

สมการพหุนามกำลังสี่คือ $T = 459.5d^4 - 399.22d^3 + 130.26d^2 - 18.004d + 1.9561$

โดยมีค่า $R^2 = 1$

จุดวิกฤต d ที่ทำให้คาบการแกว่งต่ำสุด หาจาก

$$\frac{d}{dd}\left(459.5d^4 - 399.22d^3 + 130.26d^2 - 18.004d + 1.9561\right) = 0$$

นั่นคือ $1838d^3 - 1197.66d^2 + 260.52d - 18.004 = 0$

ให้คำตอบจำนวนสามคำตอบได้แก่

คำตอบที่ 1 0.13886948205227845

คำตอบที่ 2 0.2563704820424136 + 0.06936228570930225i

คำตอบที่ 3 0.2563704820424136 - 0.06936228570930225i

และมีคำตอบที่เป็นจำนวนจริงเพียงค่าเดียวคือ 0.139 เมตร หรือประมาณ 13.9 เซนติเมตร

2. ผลการทดลองการหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุแผ่นบางรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ข้อมูลของวัตถุแผ่นบางรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

มวล (m)	207.30	กรัม	เทียบเท่ากับ	0.207	กิโลกรัม
กว้าง (A)	30.0	เซนติเมตร	เทียบเท่ากับ	0.300	เมตร
ยาว (B)	40.0	เซนติเมตร	เทียบเท่ากับ	0.400	เมตร

ค่าความเร่งเนื่องจากความโน้มถ่วงของโลก (g) 9.805 เมตร/วินาที^{2}

สูตรทางทฤษฎีของค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุแผ่นบางรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ($I_{Z_{CM}}$) : $\frac{1}{18}m\left(A^2+B^2\right)$

โมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุแผ่นบางรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ($I_{Z_{CM}}$) ที่เกิดจากแทนค่าในสูตร 0.00288 กิโลกรัม·เมตร^2

ตาราง 4 ผลการหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุแผ่นบางรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ตำแหน่งที่	ระยะ d (เมตร)	ครั้งที่	จำนวนรอบการแกว่ง (รอบ)	เวลาที่ใช้ (วินาที)	คาบ (วินาที)	คาบเฉลี่ย (วินาที)	ค่า $I_{Z_{CM}}$ จากการทดลอง (กิโลกรัม·เมตร^2)	ค่า $I_{Z_{CM}}$ จากสูตรทางทฤษฎี (กิโลกรัม·เมตร^2)	Error (%)
		1	20	22.11	1.11				
		2	20	22.14	1.11				
1	0.250	3	20	22.12	1.11	1.11	0.00283	0.00288	1.60
		4	20	22.17	1.11				
		5	20	22.16	1.11				
		1	20	20.89	1.04				
		2	20	20.82	1.04				
2	0.200	3	20	20.85	1.04	1.04	0.00289	0.00288	0.64
		4	20	20.8	1.04				
		5	20	20.83	1.04				
		1	20	19.82	0.99				
		2	20	19.81	0.99				
3	0.150	3	20	19.84	0.99	0.99	0.00291	0.00288	1.32
		4	20	19.79	0.99				
		5	20	19.77	0.99				

ตาราง 4 (ต่อ)

ตำแหน่งที่	ระยะ d (เมตร)	ครั้งที่	จำนวนรอบการแกว่ง (รอบ)	เวลาที่ใช้ (วินาที)	คาบ (วินาที)	คาบเฉลี่ย (วินาที)	ค่า $I_{Z_{CM}}$ จากการทดลอง (กิโลกรัม·เมตร^2)	ค่า $I_{Z_{CM}}$ จากสูตรทางทฤษฎี (กิโลกรัม·เมตร^2)	Error (%)
		1	20	19.68	0.98				
		2	20	19.63	0.98				
4	0.100	3	20	19.74	0.99	0.98	0.00291	0.00288	1.29
		4	20	19.65	0.98				
		5	20	19.69	0.98				
		1	20	22.73	1.14				
		2	20	22.74	1.14				
5	0.0500	3	20	22.72	1.14	1.14	0.00281	0.00288	2.38
		4	20	22.77	1.14				
		5	20	22.7	1.14				

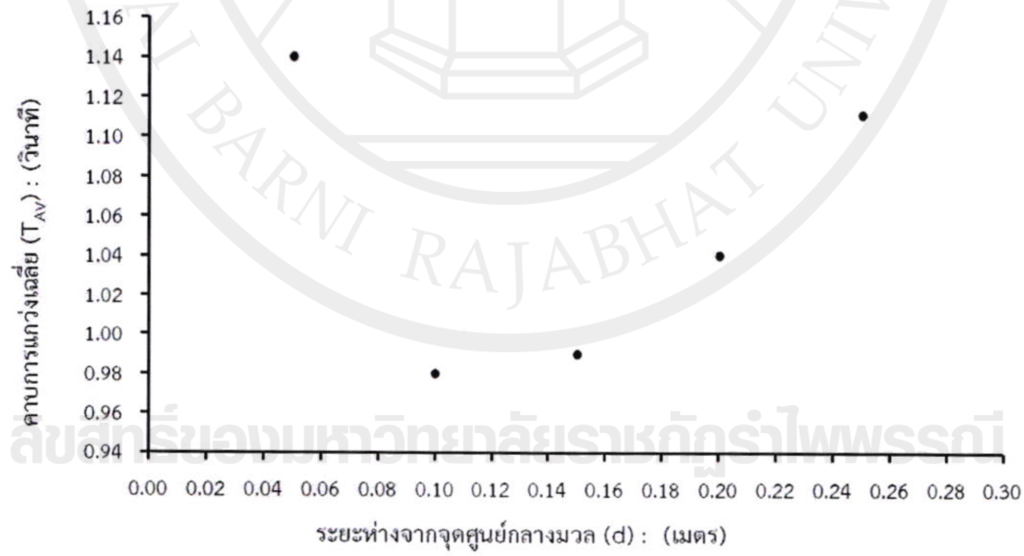
จากตาราง 4 พบว่า ตำแหน่งของจุดแขวนที่มีคาบการแกว่งต่ำสุด คือ ระยะที่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุแผ่นบางรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก 10.0 เซนติเมตร มีค่า $I_{Z_{CM}}$ จากการทดลองเท่ากับ 0.00291 กิโลกรัม·เมตร^2 และค่า $I_{Z_{CM}}$ จากสูตรทางทฤษฎี เท่ากับ 0.00288 กิโลกรัม·เมตร^2

เมื่อเขียนกราฟระหว่าง คาบเวลาเฉลี่ยในการแกว่ง กับระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวล โดยใช้ข้อมูล ดังตาราง 5

ตาราง 5 ความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวล และคาบเฉลี่ยในการแกว่งของวัตถุแผ่นบางรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

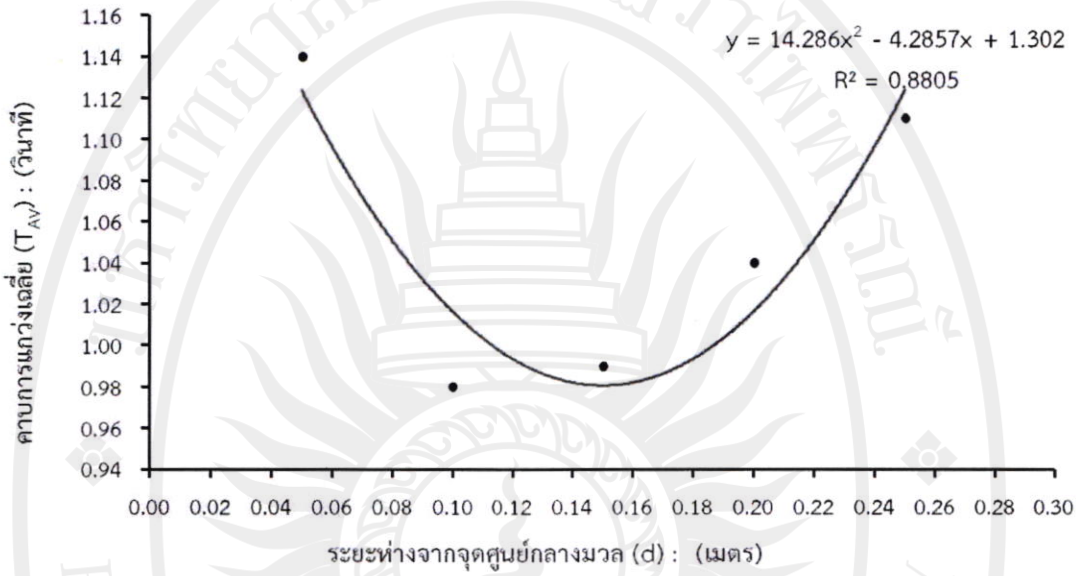
จุดที่	ระยะที่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวล (เมตร)	คาบเฉลี่ยในการแกว่ง (วินาที)
1	0.250	1.11
2	0.200	1.04
3	0.150	0.99
4	0.100	0.98
5	0.050	1.14

ซึ่งเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวล และคาบเฉลี่ยในการแกว่งของวัตถุแผ่นบางรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้ดังภาพประกอบ 22



ภาพประกอบ 22 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวล และคาบเฉลี่ยในการแกว่งของวัตถุแผ่นบางรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

เมื่อใช้โปรแกรม Microsoft Excel หาสมการของเส้นแนวโน้ม สองระดับได้แก่ พหุนามกำลังสอง และพหุนามกำลังสี่ ให้รูปสมการ และค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ (R^2) ซึ่งหาระยะห่างจากตำแหน่งศูนย์กลางมวลที่ทำให้คาบเฉลี่ยในการแกว่งมีค่าต่ำสุด ได้ดังภาพประกอบ 23 - 24



ภาพประกอบ 23 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวล และคาบเฉลี่ยในการแกว่งของวัตถุแผ่นบางรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก พร้อมเส้นแนวโน้มในรูปสมการพหุนามกำลังสอง

สมการพหุนามกำลังสองคือ $T = 14.286d^2 - 4.2857d + 1.302$

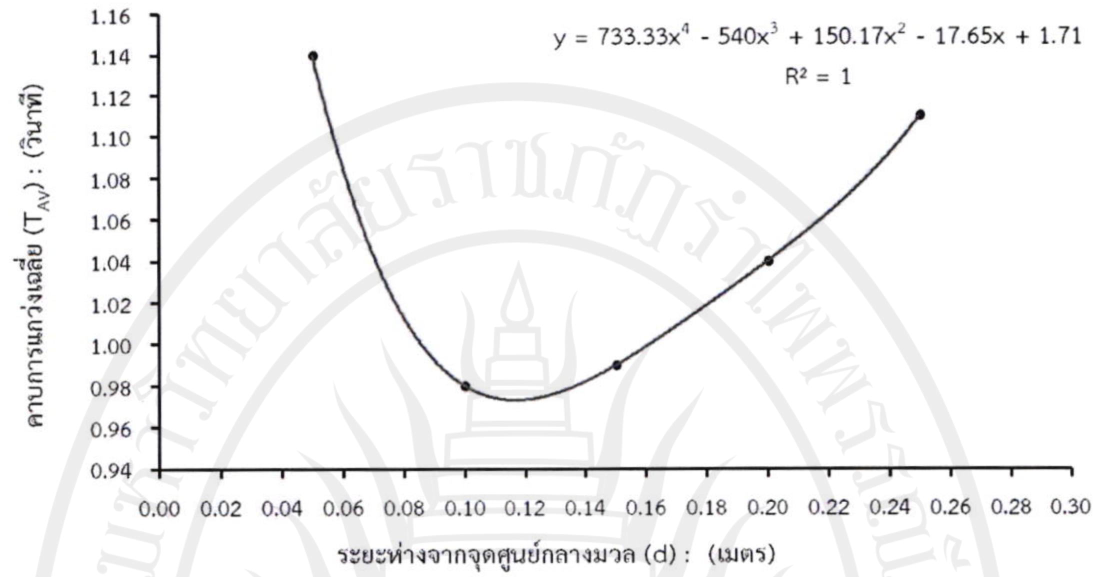
โดยมีค่า $R^2 = 0.8805$

จุดวิกฤต d ที่ทำให้คาบการแกว่งต่ำสุด หาจาก

$$\frac{d}{dd}\left(14.286d^2 - 4.2857d + 1.302\right) = 0$$

นั่นคือ $28.572d - 4.2857 = 0$

มีคำตอบคือ 0.150 เมตร หรือประมาณ 15.0 เซนติเมตร



ภาพประกอบ 24 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวล และคาบเฉลี่ยในการแกว่งของวัตถุแผ่นบางรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก พร้อมเส้นแนวโน้มในรูปสมการพหุนามกำลังสี่

สมการพหุนามกำลังสี่คือ $T = 733.33d^4 - 540d^3 + 150.17d^2 - 17.65d + 1.71$

โดยมีค่า $R^2 = 1$

จุดวิกฤต d ที่ทำให้คาบการแกว่งต่ำสุด หาจาก

$$\frac{d}{dd}\left(733.33d^4 - 540d^3 + 150.17d^2 - 17.65d + 1.71\right) = 0$$

นั่นคือ $2933.32d^3 - 1620.99d^2 + 300.34d - 17.65 = 0$

ให้คำตอบจำนวนสามคำตอบได้แก่

คำตอบที่ 1 0.11704603210432145

คำตอบที่ 2 0.2177833535222464 + 0.06307264003468901i

คำตอบที่ 3 0.2177833535222464 - 0.06307264003468901i

และมีคำตอบที่เป็นจำนวนจริงเพียงค่าเดียวคือ 0.117 เมตร หรือประมาณ 11.7 เซนติเมตร

3. ผลการทดลองการหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุแผ่นบางรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ข้อมูลของวัตถุแผ่นบางรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

มวล (m)	196.30	กรัม	เทียบเท่ากับ	0.196	กิโลกรัม
ฐานกว้าง (A)	30.0	เซนติเมตร	เทียบเท่ากับ	0.300	เมตร
ความสูง (B)	36.0	เซนติเมตร	เทียบเท่ากับ	0.360	เมตร

ค่าความเร่งเนื่องจากความโน้มถ่วงของโลก (g) 9.805 เมตร/วินาที^{2}

สูตรทางทฤษฎีของค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุแผ่นบางรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ($I_{Z_{CM}}$) : $\frac{1}{18}m\left(A^2+B^2\right)$

โมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุแผ่นบางรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ($I_{Z_{CM}}$) ที่เกิดจากแทนค่าในสูตร 0.00239 กิโลกรัม·เมตร^2

ตาราง 6 ผลการหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุแผ่นบางรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ตำแหน่งที่	ระยะ d (เมตร)	ครั้งที่	จำนวนรอบการแกว่ง (รอบ)	เวลาที่ใช้ (วินาที)	คาบ (วินาที)	คาบเฉลี่ย (วินาที)	ค่า $I_{Z_{CM}}$ จากการทดลอง (กิโลกรัม·เมตร^2)	ค่า $I_{Z_{CM}}$ จากสูตรทางทฤษฎี (กิโลกรัม·เมตร^2)	Error (%)
		1	20	20.48	1.02				
		2	20	20.5	1.03				
1	0.200	3	20	20.41	1.02	1.02	0.00236	0.00239	1.51
		4	20	20.42	1.02				
		5	20	20.47	1.02				
		1	20	19.46	0.97				
		2	20	19.51	0.98				
2	0.160	3	20	19.48	0.97	0.98	0.00240	0.00239	0.25
		4	20	19.53	0.98				
		5	20	19.54	0.98				
		1	20	18.79	0.94				
		2	20	18.77	0.94				
3	0.120	3	20	18.83	0.94	0.94	0.00236	0.00239	1.31
		4	20	18.88	0.94				
		5	20	18.87	0.94				

ตาราง 6 (ต่อ)

ตำแหน่งที่	ระยะ d (เมตร)	ครั้งที่	จำนวนรอบการแกว่ง (รอบ)	เวลาที่ใช้ (วินาที)	คาบ (วินาที)	คาบเฉลี่ย (วินาที)	ค่า $I_{Z_{CM}}$ จากการทดลอง (กิโลกรัม·เมตร^2)	ค่า $I_{Z_{CM}}$ จากสูตรทางทฤษฎี (กิโลกรัม·เมตร^2)	Error (%)
		1	20	19.26	0.96				
		2	20	19.27	0.96				
4	0.0800	3	20	19.28	0.96	0.96	0.00237	0.00239	0.77
		4	20	19.31	0.97				
		5	20	19.34	0.97				
		1	20	23.14	1.16				
		2	20	23.17	1.16				
5	0.0400	3	20	23.18	1.16	1.16	0.00230	0.00239	3.68
		4	20	23.16	1.16				
		5	20	23.22	1.16				

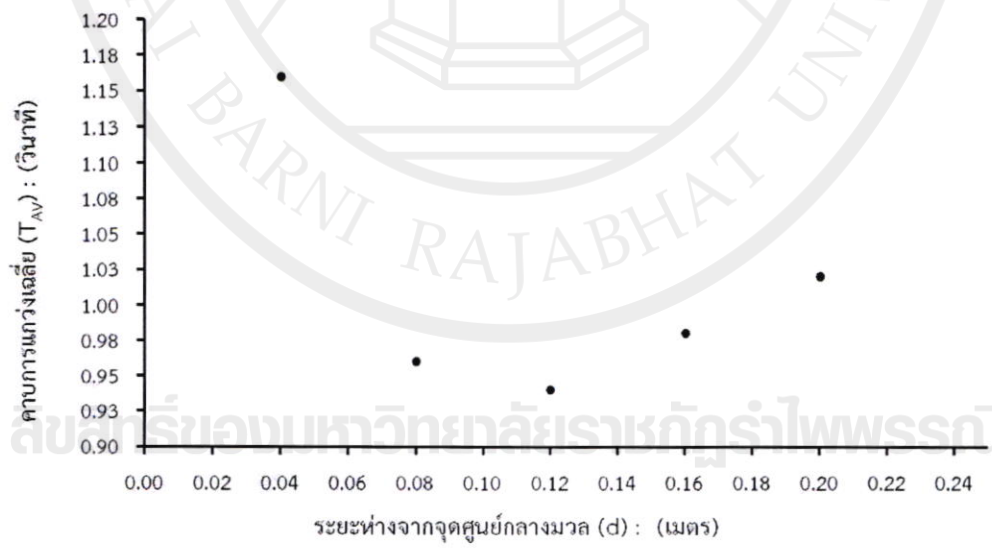
จากตาราง 6 พบว่า ตำแหน่งของจุดแขวนที่มีคาบการแกว่งต่ำสุด คือ ระยะที่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุแผ่นบางรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว 12.0 เซนติเมตร มีค่า $I_{Z_{CM}}$ จากการทดลองเท่ากับ 0.00236 กิโลกรัม·เมตร^2 และค่า $I_{Z_{CM}}$ จากสูตรทางทฤษฎี เท่ากับ 0.00239 กิโลกรัม·เมตร^2

เมื่อเขียนกราฟระหว่าง คาบเวลาเฉลี่ยในการแกว่ง กับระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวล โดยใช้ข้อมูล ดังตาราง 7

ตาราง 7 ความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวล และคาบเฉลี่ยในการแกว่งของวัตถุแผ่นบางรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

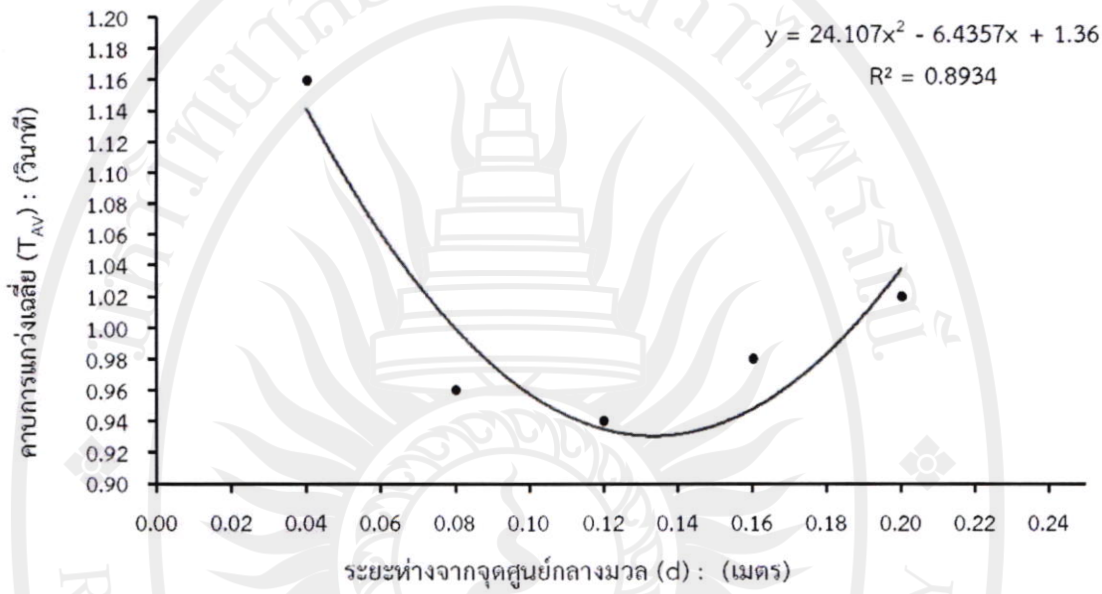
จุดที่	ระยะที่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวล (เมตร)	คาบเฉลี่ยในการแกว่ง (วินาที)
1	0.200	1.02
2	0.160	0.98
3	0.120	0.94
4	0.080	0.96
5	0.040	1.16

ซึ่งเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวล และคาบเฉลี่ยในการแกว่งของวัตถุแผ่นบางรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ได้ดังภาพประกอบ 25



ภาพประกอบ 25 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวล และคาบเฉลี่ยในการแกว่งของวัตถุแผ่นบางรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

เมื่อใช้โปรแกรม Microsoft Excel หาสมการของเส้นแนวโน้ม สองระดับได้แก่ พหุนามกำลังสอง และพหุนามกำลังสี่ ให้รูปสมการ และค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ (R^2) ซึ่งหาระยะห่างจากตำแหน่งศูนย์กลางมวลที่ทำให้คาบการแกว่งเฉลี่ยมีค่าต่ำสุด ได้ดังภาพประกอบ 26 - 27



ภาพประกอบ 26 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวล และคาบเฉลี่ยในการแกว่งของวัตถุแผ่นบางรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว พร้อมเส้นแนวโน้มในรูปสมการพหุนามกำลังสอง

สมการพหุนามกำลังสองคือ $T = 24.107d^2 - 6.4357d + 1.36$

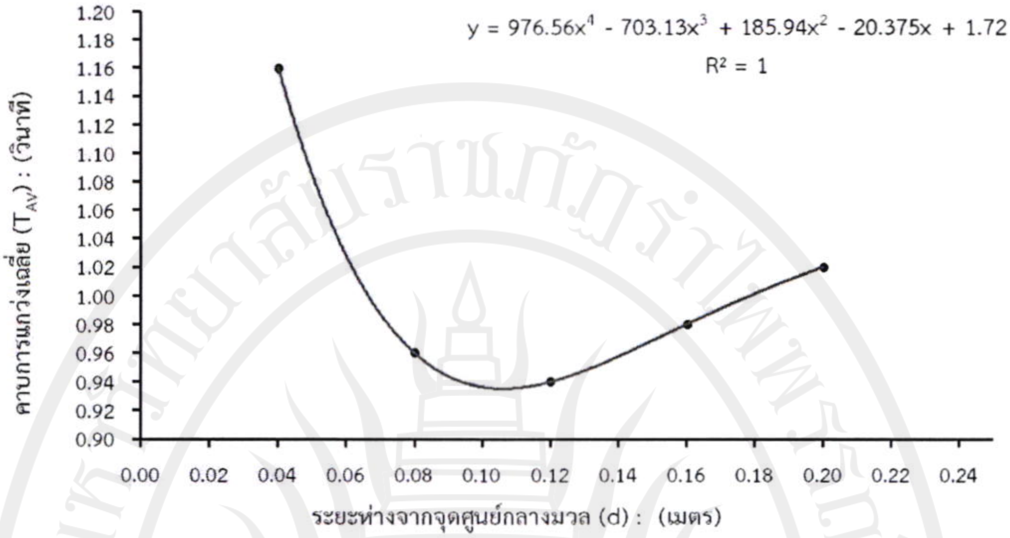
โดยมีค่า $R^2 = 0.8934$

จุดวิกฤต d ที่ทำให้คาบการแกว่งต่ำสุด หาจาก

$$\frac{d}{dd}\left(24.107d^2 - 6.4357d + 1.36\right) = 0$$

นั่นคือ $48.214d - 6.4357 = 0$

มีคำตอบคือ 0.133 เมตร หรือประมาณ 13.3 เซนติเมตร



ภาพประกอบ 27 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวล และคาบเฉลี่ยในการแกว่งของวัตถุแผ่นบางรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว พร้อมเส้นแนวโน้มในรูปสมการพหุนามกำลังสี่

สมการพหุนามกำลังสี่คือ $T = 976.56d^4 - 703.13d^3 + 185.94d^2 - 20.375d + 1.72$

โดยมีค่า $R^2 = 1$

จุดวิกฤต d ที่ทำให้คาบการแกว่งต่ำสุด หาจาก

$$\frac{d}{dd}\left(976.56d^4 - 703.13d^3 + 185.94d^2 - 20.375d + 1.72\right) = 0$$

นั่นคือ $3906.24d^3 - 2109.39d^2 + 371.88d - 20.375 = 0$

ให้คำตอบจำนวนสามคำตอบได้แก่

คำตอบที่ 1 0.10607872614417432

คำตอบที่ 2 0.2169632481345975 + 0.04580505114443976i

คำตอบที่ 3 0.2169632481345975 - 0.04580505114443976i

และมีคำตอบที่เป็นจำนวนจริงเพียงค่าเดียวคือ 0.117 เมตร หรือประมาณ 11.7 เซนติเมตร

มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริงคือ 0.106 เมตร หรือประมาณ 10.6 เซนติเมตร

4. ผลการเปรียบเทียบผลการทดลอง การหาระยะห่างจากศูนย์กลางมวลที่ทำให้คาบต่ำสุด กับผลทางทฤษฎี และผลจากการหาค่าวิกฤต

ผลการทดลองหาระยะที่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวลที่ทำให้คาบต่ำสุดโดยสามวิธีการ แสดงในตาราง 8

ตาราง 8 การเปรียบเทียบผลการทดลอง การหาระยะที่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวลที่ทำให้คาบต่ำสุด กับผลทางทฤษฎี และผลจากการสร้างเส้นแนวโน้มและหาค่าวิกฤตของสมการพหุนาม

รูปทรงของแผ่นบาง	พหุนามที่ใช้	รูปสมการ	ค่า R^2	ระยะ d ที่ทำให้คาบต่ำสุดทางทฤษฎี : d_T (เมตร)	ระยะ d ที่ทำให้คาบต่ำสุดจากการทดลอง : d_E (เมตร)	ระยะ d ที่ทำให้คาบต่ำสุดจากค่าวิกฤต : d_C (เมตร)
สี่เหลี่ยมผืนผ้า	กำลังสอง	$T = 24.352d^2 - 7.8292d + 1.6767$	0.9593	0.1443	0.135 (รูเจาะที่ 3)	0.161
	กำลังสี่	$T = 459.5d^4 – 399.22d^3 + 130.26d^2 - 18.004d + 1.9561$	1			0.139
สามเหลี่ยมมุมฉาก	กำลังสอง	$T = 14.286d^2 - 4.2857d + 1.302$	0.8805	0.1179	0.100 (รูเจาะที่ 4)	0.150
	กำลังสี่	$T = 733.33d^4 - 540d^3 + 150.17d^2 – 17.65d + 1.71$	1			0.117
สามเหลี่ยมหน้าจั่ว	กำลังสอง	$T = 24.107d^2 – 6.4357d + 1.36$	0.8934	0.1104	0.120 (รูเจาะที่ 3)	0.133
	กำลังสี่	$T = 976.56d^4 – 703.13d^3 + 185.94d^2 – 20.375d + 1.72$	1			0.106

5. ผลการเปรียบเทียบค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลระหว่างวัตถุแบบแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า สามเหลี่ยมมุมฉาก และสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ที่ระยะซึ่งที่ทำให้คาบต่ำสุด

ผลการทดลองหาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบางสามรูปแบบ แสดงในตาราง 9

ตาราง 9 แสดงค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า สามเหลี่ยมมุมฉาก และสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ที่ระยะซึ่งทำให้คาบต่ำสุด

รูปทรงของวัตถุแผ่นบาง	ระยะ d_E (เมตร)	คาบการแกว่งต่ำสุด (วินาที)	ค่า $I_{Z_{CM}}$ จากการทดลอง (กิโลกรัม•เมตร^2)	ค่า $I_{Z_{CM}}$ จากสูตรทางทฤษฎี (กิโลกรัม•เมตร^2)	Error (%)
สี่เหลี่ยมผืนผ้า	0.135	1.07	0.00864	0.00877	1.48
สามเหลี่ยมมุมฉาก	0.100	0.98	0.00291	0.00288	1.29
สามเหลี่ยมหน้าจั่ว	0.120	0.94	0.00236	0.00239	1.31

6. ผลการเปรียบเทียบคาบเฉลี่ยที่เกิดจากการแกว่งที่ตำแหน่งที่ทำให้โมเมนต์ความเฉื่อยมีค่าเป็นสองเท่าของโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลเทียบกับคาบเฉลี่ยที่เกิดจากการแทนค่าวิกฤตลงในสมการพหุนาม

ผลการทดลองหาคาบการแกว่ง ณ ตำแหน่งที่ทำให้โมเมนต์ความเฉื่อยมีค่าเป็นสองเท่าของโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวล d_T (ดูรายละเอียดการหาค่า d_T ของวัตถุแต่ละรูปทรงในภาคผนวก) แสดงในตาราง 10

ตาราง 10 แสดงคาบเฉลี่ยที่เกิดจากการแกว่งที่ตำแหน่งที่ทำให้โมเมนต์ความเฉื่อยมีค่าเป็นสองเท่าของโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลเทียบกับคาบเฉลี่ยที่เกิดจากการแทนค่าวิกฤตลงในสมการพหุนาม

รูปทรง	ระยะ d_T (เมตร)	ครั้งที่	จำนวนรอบ (รอบ)	เวลา (วินาที)	คาบ (วินาที)	คาบเฉลี่ย $[T_{MIN\text{-}THEORY}]$ (วินาที)	ระยะ d_C (เมตร)	สมการความสัมพันธ์ของ T_{AV} กับ d_C	คาบเฉลี่ย $[T_{MIN\text{-}CRISIS}]$ (วินาที)	ความแตกต่างระหว่าง $[T_{MIN\text{-}CRISIS}]$ กับ $[T_{MIN\text{-}THEORY}]$ (วินาที)
สี่เหลี่ยมผืนผ้า	0.1443	1	20	21.39	1.070	1.068	0.139	$T = 459.5d^4 - 399.22d^3 + 130.26d^2 - 18.004d + 1.9561$	1.0690	0.0011 (0.103%)
		2	20	21.36	1.068					
		3	20	21.33	1.066					
		4	20	21.36	1.068					
		5	20	21.35	1.068					

ตาราง 10 (ต่อ)

รูปทรง	ระยะ d_T (เมตร)	ครั้งที่	จำนวนรอบ (รอบ)	เวลา (วินาที)	คาบ (วินาที)	คาบเฉลี่ย $[T_{MIN\text{-}THEORY}]$ (วินาที)	ระยะ d_C (เมตร)	สมการความสัมพันธ์ของ T_{AV} กับ d_C	คาบเฉลี่ย $[T_{MIN\text{-}CRISIS}]$ (วินาที)	ความแตกต่างระหว่าง $[T_{MIN\text{-}CRISIS}]$ กับ $[T_{MIN\text{-}THEORY}]$ (วินาที)
สามเหลี่ยมมุมฉาก	0.1179	1	20	19.67	0.9835	0.9834	0.117	$T = 7.33.33d^4 - 540d^3 + 150.17d^2 - 17.65d + 1.71$	0.9810	0.0024 (0.244%)
		2	20	19.64	0.9820					
		3	20	19.70	0.9850					
		4	20	19.70	0.9850					
		5	20	19.63	0.9815					
สามเหลี่ยมหน้าจั่ว	0.1104	1	20	18.71	0.9355	0.9362	0.106	$T = 976.56d^4 - 703.13d^3 + 185.94d^2 - 20.375d + 1.72$	0.9350	0.0012 (0.128%)
		2	20	18.72	0.9360					
		3	20	18.71	0.9355					
		4	20	18.75	0.9375					
		5	20	18.73	0.9365					

จากตารางผลการทดลองข้างต้น สามารถวิจารณ์ผลการทดลองได้ ดังนี้

1. จากตาราง 2, 4 และ 6 การพิจารณาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบางจำนวน 3 รูปแบบได้แก่ สี่เหลี่ยมผืนผ้า สามเหลี่ยมมุมฉาก และสามเหลี่ยมหน้าจั่ว พบว่าจากการแทนค่าคาบการแกว่งเฉลี่ย ลงในสมการ $I_{Z_{CM}} = \frac{mgdT^2}{4\pi^2} - md^2$ นั้นให้ผลที่น่าเชื่อถือ เมื่อเปรียบเทียบกับค่าทางทฤษฎี โดยรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีค่าความคลาดเคลื่อนจากค่าทางทฤษฎีอยู่ระหว่างร้อยละ 1.06 - 1.67 รูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีค่าความคลาดเคลื่อนจากค่าทางทฤษฎีอยู่ระหว่างร้อยละ 0.64 - 2.38 และรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีค่าความคลาดเคลื่อนจากค่าทางทฤษฎีอยู่ระหว่างร้อยละ 0.25 - 3.68 นั่นแสดงให้เห็นถึงภาพรวมของการทดลองว่าการหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุแบบแผ่นบางรูปเรขาคณิตทั้งสามรูปแบบจะอยู่ระหว่างร้อยละ 0.25 - 3.68 ซึ่งอยู่ในเกณฑ์ที่ยอมรับได้คือ มีคลาดคลาดเคลื่อนไม่เกินร้อยละ 5 และเมื่อพิจารณาค่า $I_{Z_{CM}}$ ที่ได้จากการทดลองและค่า $I_{Z_{CM}}$ จากสูตรทางทฤษฎีของวัตถุแบบแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า สามเหลี่ยมมุมฉาก และสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่ระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวลที่ทำให้ได้คาบการแกว่งต่ำสุดจากการทดลอง พบว่า วัตถุแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า มีค่ามากที่สุด วัตถุแผ่นบางรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มีค่ามากรองลงมา และวัตถุแผ่นบางรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มีค่าน้อยที่สุด

2. จากตาราง 2, 4 และ 6 ยังพบว่า ความสัมพันธ์ระหว่างคาบเวลาเฉลี่ยกับระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวลไม่แสดงผลในลักษณะความสัมพันธ์เชิงเส้น แต่พบว่ากราฟผลการทดลองอยู่ในลักษณะของรูปกราฟพาราโบลาหงาย ดังภาพประกอบ 19, 22 และ 25 จึงต้องพิจารณาตำแหน่งเปลี่ยนโค้ง นั่นก็คือ จุดวิกฤตของสมการพหุนาม ซึ่งผู้วิจัยได้นำค่าคาบการแกว่งเฉลี่ยในแต่ละตำแหน่ง มาเขียนกราฟคู่กับระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางมวล จำนวน 5 ข้อมูล ต่อวัตถุแผ่นบางรูปเรขาคณิต 1 รูปแบบ และทำการกำหนดเส้นแนวโน้มสองรูปแบบ คือ สมการพหุนามกำลังสองและสมการพหุนามกำลังสี่ พบว่า เส้นแนวโน้มที่เกิดจากการกำหนดรูปสมการเป็นพหุนามกำลังสอง ดังภาพประกอบ 20, 23 และ 26 นั้น ผ่านจุดข้อมูลน้อยกว่า เมื่อกำหนดรูปสมการให้เป็นพหุนามกำลังสี่ ดังภาพประกอบ 21, 24 และ 27 ทำให้ค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ หรือ R square หรือ R^2 โดยค่า R^2 หมายถึงสัดส่วนที่ตัวแปรต้นสามารถอธิบายการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรตามได้ หรือเป็นตัวที่แสดงประสิทธิภาพของสมการนั่นเอง ค่า R^2 มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 1 และไม่มีหน่วย ถ้า R^2 มีค่าเข้าใกล้ 1 แสดงว่า สมการที่ได้มีประสิทธิภาพสูงเชื่อถือได้ ถ้าเข้าใกล้ 0 แสดงว่า สมการที่ได้มีประสิทธิภาพต่ำ ซึ่งจากการสร้างเส้นแนวโน้มและกำหนดสมการให้ผลคือ

รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า เมื่อกำหนดสมการของเส้นแนวโน้มให้เป็นสมการพหุนามกำลังสอง เส้นแนวโน้มจะผ่านจุดข้อมูลเพียง 1 จุด และมีค่า R^2 คือ 0.9593 แต่เมื่อกำหนดสมการของเส้นแนวโน้มให้เป็นสมการพหุนามกำลังสี่ เส้นแนวโน้มจะผ่านจุดข้อมูลครบ 5 จุด และมีค่า R^2 คือ 1

รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เมื่อกำหนดสมการของเส้นแนวโน้มให้เป็นสมการพหุนามกำลังสอง เส้นแนวโน้มจะเฉียด แต่ไม่ผ่านจุดข้อมูลใดเลย และมีค่า R^2 คือ 0.8805 แต่เมื่อกำหนดสมการของเส้นแนวโน้มให้เป็นสมการพหุนามกำลังสี่ เส้นแนวโน้มจะผ่านจุดข้อมูลครบ 5 จุด และมีค่า R^2 คือ 1

รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เมื่อกำหนดสมการของเส้นแนวโน้มให้เป็นสมการพหุนามกำลังสอง เส้นแนวโน้มจะเฉียด แต่ไม่ผ่านจุดข้อมูลใดเลย และมีค่า R^2 คือ 0.8934 แต่เมื่อกำหนดสมการของเส้นแนวโน้มให้เป็นสมการพหุนามกำลังสี่ เส้นแนวโน้มจะผ่านจุดข้อมูลครบ 5 จุด และมีค่า R^2 คือ 1

ดังนั้น ในการเลือกพหุนามที่จะนำไปหาค่าวิกฤตจึงเลือกใช้สมการความสัมพันธ์ระหว่างคาบ (T) กับระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวล (d) ในรูปสมการพหุนามกำลังสี่

3. จากตาราง 8 และ 9 ในการเปรียบเทียบระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวลที่ทำให้ได้คาบต่ำสุด 3 วิธี ได้แก่ ระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวลที่ทำให้ได้คาบการแกว่งต่ำสุดทางทฤษฎี (d_T), ระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวลที่ทำให้ได้คาบการแกว่งต่ำสุดจากการทดลอง (d_E) และระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวลที่ทำให้ได้คาบการแกว่งต่ำสุดจากการหาค่าวิกฤต (d_C) ของวัตถุแผ่นบางรูปเรขาคณิตทั้งสามรูปแบบ ได้ผลดังนี้

ในกรณีของวัตถุแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า พบว่าระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวลที่ทำให้ได้คาบการแกว่งต่ำสุดทางทฤษฎี (d_T) ระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวลที่ทำให้ได้คาบการแกว่งต่ำสุดจากการทดลอง (d_E) และ ระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวลที่ทำให้ได้คาบการแกว่งต่ำสุดจากการหาค่าวิกฤต (d_C) คือ 14.43 , 13.5 และ 13.9 เซนติเมตรตามลำดับ ซึ่งจากการที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าได้เจาะรู จำนวน 5 รู ที่ตำแหน่ง 22.5, 18.0, 13.5, 9.0 และ 4.5 เซนติเมตรนั้น พบว่าทั้งค่า d_T และ d_C เป็นระยะที่อยู่ระหว่างรูเจาะที่ 2 และ 3 แต่ใกล้รูเจาะที่ 3 มากกว่ารูเจาะที่ 2

ในกรณีของวัตถุแผ่นบางรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก พบว่าระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวลที่ทำให้เกิดคาบการแกว่งต่ำสุดทางทฤษฎี (d_T) ระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวลที่ทำให้เกิดคาบการแกว่งต่ำสุดจากการวัตถุแผ่นบางรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มีค่า $I_{Z_{CM}}$ จากการทดลองและค่า $I_{Z_{CM}}$ จากสูตรทางทฤษฎีมากรองลงมา (d_E) และ ระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวลที่ทำให้เกิดคาบการแกว่งต่ำสุดจากการหาค่าวิกฤต (d_C) คือ 11.79, 10.0 และ 11.7 เซนติเมตร ตามลำดับ ซึ่งจากการที่

รูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้เจาะรู จำนวน 5 รู ที่ตำแหน่ง 25.0, 20.0, 15.0, 10.0 และ 5.0 เซนติเมตรนั้น พบว่าทั้งค่า d_T และ d_C เป็นระยะที่อยู่ระหว่างรูเจาะที่ 3 และ 4 แต่ใกล้รูเจาะที่ 4 มากกว่ารูเจาะที่ 3

ในกรณีของวัตถุแผ่นบางรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว พบว่าระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวลที่ทำให้ได้คาบการแกว่งต่ำสุดทางทฤษฎี (d_T) ระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวลที่ทำให้ได้คาบการแกว่งต่ำสุดจากการทดลอง (d_E) และ ระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวลที่ทำให้ได้คาบการแกว่งต่ำสุดจากการหาค่าวิกฤต (d_C) คือ 11.04 , 12.0 และ 10.6 เซนติเมตร ตามลำดับ ซึ่งจากการที่รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้เจาะรู จำนวน 5 รู ที่ตำแหน่ง 20.0, 16.0, 12.0, 8.0 และ 4.0 เซนติเมตรนั้น พบว่าทั้งค่า d_T และ d_C เป็นระยะที่อยู่ระหว่างรูเจาะที่ 3 และ 4 แต่ใกล้รูเจาะที่ 3 มากกว่ารูเจาะที่ 4

4. จากตาราง 10 เมื่อเปรียบเทียบค่าคาบการแกว่งต่ำสุดทางทฤษฎี ($T_{MIN\text{-}THEORY}$) กับค่าคาบการแกว่งที่เกิดจากการแทนค่า d_C วิกฤตลงในสมการพหุนามกำลังสี่ ($T_{MIN\text{-}CRISIS}$) พบว่าคาบการแกว่งจากทั้งสองกรณีนั้นมีค่าที่ใกล้เคียงกันมาก โดยแตกต่างกันเพียงในระดับมิลลิวินาที มีค่าความคลาดเคลื่อนอยู่ระหว่างร้อยละ 0.103 - 0.244 เท่านั้น

สรุปผลและข้อเสนอแนะ

สรุปผล

การวิจัยในครั้งนี้ให้ผลตามวัตถุประสงค์ของการวิจัยคิดเป็นอัตราร้อยละ 100 โดยมีรายละเอียดดังนี้

1. ชุดทดลองฟิสิกัลเพนดูลัมรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบางสามารถหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า สามเหลี่ยมมุมฉาก และสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้อย่างยอดเยี่ยม เมื่อเปรียบเทียบค่าที่ได้จากการทดลองกับค่าที่คำนวณได้ในทางทฤษฎีมีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี โดยค่าที่เกิดจากการทดลองมีความคลาดเคลื่อนอยู่ระหว่างร้อยละ 0.25 - 3.68 เท่านั้น

2. ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวล ($I_{Z_{CM}}$) ของวัตถุแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า สามเหลี่ยมมุมฉาก และสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยค่า $I_{Z_{CM}}$ ที่ได้จากการทดลองมีความสอดคล้องกับค่า $I_{Z_{CM}}$ ที่คำนวณทางทฤษฎี มีค่าความคลาดเคลื่อนต่ำกว่าร้อยละ 5 ทุกวัตถุที่ศึกษา

3. ค่า $I_{Z_{CM}}$ จากการทดลองและค่า $I_{Z_{CM}}$ จากสูตรทางทฤษฎีของวัตถุแผ่นบางรูปเลขาคณิตที่ระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวลที่ทำให้ได้คาบการแกว่งต่ำสุดจากการทดลอง พบว่า วัตถุแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า มีค่ามากที่สุด วัตถุแผ่นบางรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มีค่ารองลงมา และวัตถุแผ่นบางรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มีค่าน้อยที่สุด

4. ตำแหน่งที่ทำให้ได้คาบการแกว่งมีค่าต่ำสุด เมื่อเปรียบเทียบคาบเฉลี่ยต่ำสุดที่เกิดจากผลของการแกว่งในการทดลองกับผลการคำนวณทางทฤษฎีมีความสอดคล้องกันอย่างมาก โดยค่าทั้งสองมีความแตกต่างกันในระดับมิลลิวินาทีเท่านั้น โดยจะเป็นตำแหน่งที่โมเมนต์ความเฉื่อยมีค่าเป็นสองเท่าของโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลด้วย

นอกจากนี้งานวิจัยยังมีประโยชน์ต่อการศึกษาในระดับมัธยมศึกษา และระดับอุดมศึกษา โดยสามารถนำแนวคิดนี้ไปประยุกต์ใช้ออกแบบชุดการทดลองเพื่อศึกษาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุแผ่นบางอื่น ๆ ในรูปแบบที่ง่ายหรือหลากหลายมากขึ้น โดยเลือกใช้อุปกรณ์ที่มีราคาถูกและสามารถหาได้ง่ายในชีวิตประจำวัน

ข้อเสนอแนะ

1. การใช้อุปกรณ์จับเวลาเนื่องจากเป็นการทดลองที่ต้องการให้อุปกรณ์การทดลองสามารถหาได้ง่ายจากท้องถิ่น จึงเลือกใช้นาฬิกาจับเวลา ซึ่งการจับเวลาอาจให้ความคลาดเคลื่อน

อย่างสุ่ม เนื่องจากผู้จับเวลาต้องใช้สายตาในการคาดคะเน เมื่อลูกตุ้มฟิสิกัลเคลื่อนที่ครบรอบตามจำนวนที่ต้องการ ซึ่งเวลาอาจมีผลคลาดเคลื่อน + 0.05 ถึง 0.15 วินาที ในการที่สมองสั่งการให้นิ้วมือกดปุ่มหยุดเวลา ผู้วิจัยจึงเสนอว่าหากปรับเปลี่ยนอุปกรณ์จากเครื่องจับเวลาให้เป็นอุปกรณ์ที่มีมาตรฐานมากขึ้นและลดการทำงานของมนุษย์ เช่น เซนเซอร์ และโฟโตเกท น่าจะให้ผลการทดลองที่แม่นยำมากขึ้น

2. รูที่ใช้แขวนวัตถุที่ถูกเจาะขึ้นควรมีขนาดพอดีกับวัตถุที่ใช้เป็นแกนสำหรับแขวน เพราะหากรูที่เจาะมีขนาดใหญ่กว่าแกนที่ใช้สำหรับแขวนมาก ๆ จะทำให้แผ่นวัตถุเกิดการส่ายไปทางด้านหน้าและหลัง ซึ่งเป็นการเคลื่อนที่ที่ไม่อยู่ในระนาบเดียวและถือว่าไม่เป็นการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย โดยผู้วิจัยได้ทดสอบกับขาตั้งหลายประเภท และพบว่าการใช้ขาตั้งที่มีแผ่นอะคริลิกใสและมีสเกลกำกับ เป็นอุปกรณ์ที่เหมาะสมที่สุด เนื่องจาก ทราบมุมในการแกว่งที่ชัดเจน และไม่มีลมมารบกวน สังเกตและนับคาบการแกว่งได้ง่าย

เอกสารและสิ่งอ้างอิง

เอกสารและสิ่งอ้างอิง

กระทรวงศึกษาธิการ. (2552). **หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551**. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.

จรัส บุญยธรรมมา. (2545). **โมเมนต์ความเฉื่อย ฟิสิกส์ราชมงคล**. (ออนไลน์). แหล่งที่มา : http://www.rmutphysics.com/charud/virtualexperiment/explorescience/inertia/inertia.htm. 12 มกราคม 2560.

ธีระพันธ์ สันติเทวกุล. (2547). **กลศาสตร์**. ปัตตานี : ฝ่ายเทคโนโลยีทางการศึกษา สำนักวิทยบริการ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตปัตตานี.

ปิยพงษ์ สิทธิคง. (2547). **ฟิสิกส์ระดับอุดมศึกษา เล่ม 1**. พิมพ์ครั้งที่ 5. กรุงเทพฯ : เพียร์สันเอ็ดดูเคชั่น อินโดไชน่า.

ภาควิชาฟิสิกส์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. (2543). **ฟิสิกส์ 1.** พิมพ์ครั้งที่ 11. กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สมชาย เกียรติกมลชัย. (2553). **ฟิสิกส์กับปริพันธ์**. กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

Banks, P.E. (August 2005). "An Inexpensive Moment of Inertia Experiment," **The Physics Teacher**. 43 (6) : 389.

Burstone, C.J. (Novermber 1988). "Moment to Force Ratios and the Center of Rotation," **American Journal of Orthodontics**. 94 (5) : 426 - 431.

Russeva. G.B., Tsutsumanova, G.G. and Russev, S.C. (January 2010). "An Experiment on a Physical Pendulum and Steiner's Theorem,". **Physics Education**. 45 (1) : 59 - 62.

Serway, R.A. and John W.J. (2004). **Physics for Scientists and Engineers**. 6th Edition. New York : Thomson-Brooks/Cole.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

แนวโน้มของคาบเวลาเมื่อเลื่อนตำแหน่งออกตามแนวขนานวัดจากจุดศูนย์กลางมวล

จากสมการ (34) ค่าระยะห่าง d ที่ทำให้คาบการแกว่งของลูกตุ้มฟิสิกัลป์มีค่าต่ำสุด เขียนได้คือ

$$d = \pm\sqrt{\frac{I_{Z_{CM}}}{m}}$$

จากทฤษฎีบทแกนขนานของสไตน์เนอร์

$$I = I_{CM} + md^2$$

แทนค่า $d = \pm\sqrt{\frac{I_{Z_{CM}}}{m}}$ ลงในสมการจะพบว่า

$$I_Z = I_{Z_{CM}} + m\left(\pm\sqrt{\frac{I_{Z_{CM}}}{m}}\right)^2 = 2I_{Z_{CM}}$$

นั่นคือ ตำแหน่ง d ใด ใดที่ให้ค่า $I_Z = 2I_{Z_{CM}}$ จะเป็นตำแหน่งที่ทำให้เกิดคาบน้อยที่สุด

ในกรณีของสี่เหลี่ยมผืนผ้า $I_{Z_{CM}} = \frac{1}{12}m\left(A^2 + B^2\right)$

ระยะ d ที่ทำให้ T น้อยที่สุดจึงเป็น

$$d = \sqrt{\frac{\frac{1}{12}m\left(A^2 + B^2\right)}{m}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{\left(A^2 + B^2\right)}$$

เมื่อแทนค่าความกว้าง (A) และความยาว (B) ของแผ่นอะคริลิกรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ใช้ในการทดลองลงไป คือ A = 0.400 เมตร และ B = 0.300 เมตร จะได้ค่า d = 0.1443 เมตร หรือประมาณ 14.43 เซนติเมตร

บนแผ่นอะคริลิกรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ถูกเจาะรูเป็นระยะทุก ๆ 4.50 เซนติเมตร จำนวน 5 รู ตามแนวที่วัดจากจุดยอดที่ไกลที่สุด ไปยังจุดศูนย์กลางมวล

รูเจาะที่ 1 : อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวลออกไป 22.50 เซนติเมตร

รูเจาะที่ 2 : อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวลออกไป 18.00 เซนติเมตร

รูเจาะที่ 3 : อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวลออกไป 13.50 เซนติเมตร

รูเจาะที่ 4 : อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวลออกไป 9.00 เซนติเมตร

รูเจาะที่ 5 : อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวลออกไป 4.50 เซนติเมตร

ซึ่งพบว่า ค่า d = 14.43 เซนติเมตร เป็นตำแหน่งที่อยู่ระหว่างรูเจาะที่ 2 และ 3 โดยอยู่ใกล้กับตำแหน่งรูเจาะที่ 3 มากกว่ารูเจาะที่ 2 แนวโน้มของค่า T จึงต่ำสุด ณ ตำแหน่งรูเจาะที่ 3 ซึ่งให้ผลสอดคล้องกับการทดลอง

ในกรณีของสามเหลี่ยมมุมฉาก $I_{Z_{CM}} = \frac{1}{18}m\left(A^2 + B^2\right)$

ระยะ d ที่ทำให้ T น้อยที่สุดจึงเป็น

$$d = \sqrt{\frac{\frac{1}{18}m\left(A^2 + B^2\right)}{m}}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{\left(A^2 + B^2\right)}$$

เมื่อแทนค่าความยาวฐาน (A) และความสูง (B) ของแผ่นอะคริลิกรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่ใช้ในการทดลองลงไป คือ A = 0.400 เมตร และ B = 0.300 เมตร จะได้ค่า d = 0.1179 เมตร หรือประมาณ 11.79 เซนติเมตร

บนแผ่นอะคริลิกรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ถูกเจาะรูเป็นระยะทุก ๆ 5.00 เซนติเมตร จำนวน 5 รู ตามแนวที่วัดจากจุดยอดที่ไกลที่สุด ไปยังจุดศูนย์กลางมวล

รูเจาะที่ 1 : อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวลออกไป 25.00 เซนติเมตร

รูเจาะที่ 2 : อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวลออกไป 20.00 เซนติเมตร

รูเจาะที่ 3 : อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวลออกไป 15.00 เซนติเมตร

รูเจาะที่ 4 : อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวลออกไป 10.00 เซนติเมตร

รูเจาะที่ 5 : อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวลออกไป 5.00 เซนติเมตร

ซึ่งพบว่า ค่า d = 11.79 เซนติเมตร เป็นตำแหน่งที่อยู่ระหว่างรูเจาะที่ 3 และ 4 โดยอยู่ใกล้กับตำแหน่งรูเจาะที่ 4 มากกว่ารูเจาะที่ 3 แนวโน้มของค่า T จึงต่ำสุด ณ ตำแหน่งรูเจาะที่ 4 ซึ่งให้ผลสอดคล้องกับการทดลอง

ในกรณีของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $I_{Z_{CM}} = \frac{1}{18}m\left(A^2 + B^2\right)$

ระยะ d ที่ทำให้ T น้อยที่สุดจึงเป็น

$$d = \sqrt{\frac{\frac{1}{18}m\left(A^2 + B^2\right)}{m}}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{\left(A^2 + B^2\right)}$$

เมื่อแทนค่าความยาวฐาน (A) และความสูง (B) ของแผ่นอะคริลิกรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่ใช้ในการทดลองลงไป คือ A = 0.30 เมตร และ B = 0.36 เมตร จะได้ค่า d = 0.1104 เมตร หรือประมาณ 11.04 เซนติเมตร

บนแผ่นอะคริลิกรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ถูกเจาะรูเป็นระยะทุก ๆ 4.00 เซนติเมตร จำนวน 5 รู ตามแนวที่วัดจากจุดยอดที่ไกลที่สุด ไปยังจุดศูนย์กลางมวล

รูเจาะที่ 1 : อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวลออกไป 20.00 เซนติเมตร

รูเจาะที่ 2 : อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวลออกไป 16.00 เซนติเมตร

รูเจาะที่ 3 : อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวลออกไป 12.00 เซนติเมตร

รูเจาะที่ 4 : อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวลออกไป 8.00 เซนติเมตร

รูเจาะที่ 5 : อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวลออกไป 4.00 เซนติเมตร

ซึ่งพบว่า ค่า d = 11.04 เซนติเมตร เป็นตำแหน่งที่อยู่ระหว่างรูเจาะที่ 3 และ 4 โดยอยู่ใกล้กับตำแหน่งรูเจาะที่ 3 มากกว่ารูเจาะที่ 4 แนวโน้มของค่า T จึงต่ำสุด ณ ตำแหน่งรูเจาะที่ 3 ซึ่งให้ผลสอดคล้องกับการทดลอง

ภาคผนวก ข

ตัวอย่างตารางบันทึกผลการทดลอง

ตัวอย่างตารางบันทึกผลการทดลองการหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุ (ยกตัวอย่างเฉพาะแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า)

ตำแหน่งที่	ระยะ d (เมตร)	ครั้งที่	จำนวนรอบการแกว่ง (รอบ)	เวลาที่ใช้ (วินาที)	คาบ (วินาที)	คาบเฉลี่ย (วินาที)	ค่า $I_{Z_{CM}}$ จากการทดลอง (กิโลกรัม·เมตร^2)	ค่า $I_{Z_{CM}}$ จากสูตรทางทฤษฎี (กิโลกรัม·เมตร^2)	Error (%)
		1	20	....	....				
		2	20	....	....				
1	....	3	20	....	....	....	....	....	....
		4	20	....	....				
		5	20	....	....				
		1	20	....	....				
		2	20	....	....				
2	....	3	20	....	....	....	....	....	....
		4	20	....	....				
		5	20	....	....				

ตัวอย่างตารางบันทึกผลการทดลองการหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุ (ยกตัวอย่างเฉพาะแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า) (ต่อ)

ตำแหน่งที่	ระยะ d (เมตร)	ครั้งที่	จำนวนรอบการแกว่ง (รอบ)	เวลาที่ใช้ (วินาที)	คาบ (วินาที)	คาบเฉลี่ย (วินาที)	ค่า $I_{Z_{CM}}$ จากการทดลอง (กิโลกรัม·เมตร^2)	ค่า $I_{Z_{CM}}$ จากสูตรทางทฤษฎี (กิโลกรัม·เมตร^2)	Error (%)
		1	20	....	....				
		2	20	....	....				
3	....	3	20	....	....	....	....	....	....
		4	20	....	....				
		5	20	....	....				
		1	20	....	....				
		2	20	....	....				
4	....	3	20	....	....	....	....	....	....
		4	20	....	....				
		5	20	....	....				

ตัวอย่างตารางบันทึกผลการทดลองการหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุ (ยกตัวอย่างเฉพาะแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า) (ต่อ)

ตำแหน่งที่	ระยะ d (เมตร)	ครั้งที่	จำนวนรอบการแกว่ง (รอบ)	เวลาที่ใช้ (วินาที)	คาบ (วินาที)	คาบเฉลี่ย (วินาที)	ค่า $I_{Z_{CM}}$ จากการทดลอง (กิโลกรัม·เมตร^2)	ค่า $I_{Z_{CM}}$ จากสูตรทางทฤษฎี (กิโลกรัม·เมตร^2)	Error (%)
		1	20	....	....				
		2	20	....	....				
5	....	3	20	....	....	....	....	....	....
		4	20	....	....				
		5	20	....	....				

ตัวอย่างตารางบันทึกผลแสดงคาบเฉลี่ยที่เกิดจากการแกว่งที่ตำแหน่งที่ทำให้โมเมนต์ความเฉื่อยมีค่าเป็นสองเท่าของโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลเทียบกับคาบเฉลี่ยที่เกิดจากการแทนค่าวิกฤตลงในสมการพหุนาม (ยกตัวอย่างเฉพาะแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า)

รูปทรง	ระยะ d_T (เมตร)	ครั้งที่	จำนวนรอบ (รอบ)	เวลา (วินาที)	คาบ (วินาที)	คาบเฉลี่ย $[T_{MIN\text{-}THEORY}]$ (วินาที)	ระยะ d_C (เมตร)	สมการความสัมพันธ์ของ T_{AV} กับ d_C	คาบเฉลี่ย $[T_{MIN\text{-}CRISIS}]$ (วินาที)	ความแตกต่างระหว่าง $[T_{MIN\text{-}CRISIS}]$ กับ $[T_{MIN\text{-}THEORY}]$ (วินาที)
สี่เหลี่ยมผืนผ้า	0.1443	1	20	....	....	....	....	....	....	....
		2	20	....	....					
		3	20	....	....					
		4	20	....	....					
		5	20	....	....					

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ - ชื่อสกุล	นางปิ่นแก้ว กฤชแสงโชติ (ทวีกสิกรรม)
วัน เดือน ปีเกิด	8 มกราคม 2526
สถานที่เกิด	อำเภอหนองฉาง จังหวัดอุทัยธานี
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	8/55 หมู่บ้านสวนสวยริมน้ำ ซอยพุทธมณฑลสายสาม 28 ถนนพุทธมณฑลสายสาม แขวงศาลาธรรมสพน์ เขตทวีวัฒนา กรุงเทพมหานคร 10170
ตำแหน่งหน้าที่การงานในปัจจุบัน	ครูชำนาญการ คศ.2
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	โรงเรียนกาญจนาภิเษกวิทยาลัยนครปฐม (พระตำหนักสวนกุหลาบมัธยม) อำเภอพุทธมณฑล จังหวัดนครปฐม

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2541	ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โรงเรียนหนองฉางวิทยา ตำบลหนองฉาง อำเภอหนองฉาง จังหวัดอุทัยธานี
พ.ศ. 2544	ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย โรงเรียนหนองฉางวิทยา ตำบลหนองฉาง อำเภอหนองฉาง จังหวัดอุทัยธานี
พ.ศ. 2548	วิทยาศาสตรบัณฑิต วิชาเอกฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
พ.ศ. 2548	ประกาศนียบัตรบัณฑิต (วิชาชีพครู) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
พ.ศ. 2560	วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิทยาศาสตร์ศึกษา (ฟิสิกส์) มหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี